

Ute SPROESSER, Markus VOGEL, Tobias DÖRFLER, Heidelberg &  
Andreas EICHLER, Kassel

## **Begriffswissen zu linearen Funktionen und algebraisch-graphischer Darstellungswechsel: Schülerfehler vs. Lehrereinschätzung**

### **Einleitung**

Das Projekt ProfiL 9 der Pädagogischen Hochschule Heidelberg fokussiert in seiner Hauptstudie auf die Entwicklung und Evaluation einer Lehrerfortbildung zu Lernschwierigkeiten mit Funktionen. In Vorbereitung dieser Fortbildung wurde in einer Vorstudie untersucht, welche aus der Literatur bekannten Schwierigkeiten unter Lernenden Vorort bei Aufgaben des Inhaltsbereichs lineare Funktionen auftreten und wie zutreffend ihre Lehrkräfte dies einschätzen. Dieser Beitrag nimmt in den Blick, inwieweit es in Vor- und Hauptstudie systematische Unterschiede in den Lösungsraten zwischen Aufgaben zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel und zum Begriffswissen über Steigung und y-Achsenabschnitt gibt.

### **Theoretischer Hintergrund**

Lineare Funktionen in Klasse 7/8 stellen in der Regel den ersten algebraisch-formalen Kontakt von Lernenden mit dem Inhaltbereich Funktionen dar (z. B. Land Baden-Württemberg, 2004). Da in den folgenden Schuljahren an diese Erfahrungen und Kompetenzen angeknüpft wird, ist es wichtig, unter Schülerinnen und Schülern belastbare Konzepte aufzubauen und deren Lernschwierigkeiten angemessen zu begegnen. Im Hinblick darauf, dass das Funktionale Denken im Sinne eines Denkens in Zusammenhängen, Veränderungen oder Abhängigkeiten über den schulischen Kontext hinaus auch im Alltag von Schülerinnen und Schülern relevant ist (z. B. Vollrath, 1989), erscheint dies umso bedeutsamer.

Für die hier vorgestellte Studie liegt der Fokus auf graphischen und algebraischen Darstellungen bei innermathematischen Aufgabenstellungen (vgl. z. B. Land Baden-Württemberg, 2004). Typische Aufgaben dazu sind graphisch-algebraische Darstellungswechsel, bei denen zunächst die Parameter Steigung bzw. y-Achsenabschnitt in der Ausgangsdarstellung identifiziert und anschließend in der Zieldarstellung realisiert werden. Die Lernenden müssen also im Hinblick auf einen erfolgreichen Darstellungswechsel über Kenntnisse bezüglich dieser Parameter in Ausgangs- und Zieldarstellung verfügen, sowie wissen, wie die Parameter in den beiden Darstellungen ineinander überführt werden können. In dieser Perspektive stellt Begriffswis-

sen über Steigung und y-Achsenabschnitt eine notwendige Voraussetzung für den graphisch-algebraischen Darstellungswechsel dar. Diese Überlegungen sind konsistent mit der Betrachtung von Duval (2006), der Darstellungswechsel als die komplexesten mathematischen Umformungen „Conversions“ bezeichnet; das Ablesen der Parameter aus einem Graphen oder einer Gleichung kann in seiner Terminologie eher als ein „Treatment“ bzw. eine Vorstufe oder Teilhandlung einer „Conversion“ angesehen werden.

Zahlreiche empirische Studien dokumentieren Lernschwierigkeiten mit linearen Funktionen unter Schülerinnen und Schülern (z. B. Hadjidemetriou & Williams, 2002; Nitsch, 2015). Beispiele für Schwierigkeiten beim graphisch-algebraischen Darstellungswechsel sind die Verwechslung der Parameter, Vorzeichenfehler oder der Fokus auf Achsenschnittpunkte. Nitsch (2015) stellt im Zusammenhang mit der Entwicklung eines Testinstruments zur Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge fest, dass ein Item zum Ablesen von y-Achsenabschnitt und Steigung aus einem Graphen empirisch geringere Lösungsraten aufweist als Aufgaben zum Darstellungswechsel von Graph zu Funktionsgleichung. Dies ist vor dem Hintergrund obiger Überlegungen (cf. Duval, 2006) wenig erwartungskonform, wird aber von der Autorin nicht weiter analysiert.

Lernschwierigkeiten wie die im vorausgehenden Absatz genannten sind Lehrkräften laut der Studie von Hadjidemetriou und Williams (2002) nur unzureichend bekannt: Die Autoren stellen beachtliche Defizite sowohl in Bezug auf die Kenntnis bestimmter Lernschwierigkeiten als auch auf die adäquate Einschätzung von Aufgabenschwierigkeiten fest. Schwächen in der Einschätzung von Aufgabenschwierigkeiten wurden in ähnlicher Weise auch durch andere Studien dokumentiert (z. B. Nathan & Koedinger, 2000).

Diese Studie greift mit der Untersuchung der Übereinstimmung von Lehrereinschätzungen und empirischen Schülerleistungen in Bezug auf innermathematische Aufgaben zu linearen Funktionen ein Forschungsdesiderat auf. Insbesondere soll analysiert werden, inwieweit es systematische Unterschiede zwischen Aufgaben zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel und Aufgaben zum Begriffswissen über die Parameter Steigung und y-Achsenabschnitt gibt. Die entsprechenden Forschungsfragen lauten:

- Wie (zutreffend) schätzen die befragten Lehrkräfte Lösungsraten in ihren Klassen ein?
- Wie erfolgreich bearbeiten die Lernenden die vorgelegten Aufgaben?

## **Methode**

In der Vorstudie des Projekts Profil 9 bearbeiteten 80 Schülerinnen und Schüler (45,0% weiblich) einer Gymnasial- und drei Realschulklassen einen Paper-Pencil-Test. Die Lernenden waren zum Testzeitpunkt zwischen 12 und 16 Jahre alt ( $M = 13,73$ ;  $SD = 0,99$ ). Um langfristige Lerneffekte zu untersuchen, erfolgte die Testung einige Monate nach Abschluss der Unterrichtseinheit lineare Funktionen. Ergänzend wurden die vier Mathematik-Lehrkräfte dieser Klassen in halbstandardisierten Interviews befragt. Diese verfügten über maximal drei Jahre Lehrerfahrung nach dem Referendariat.

Zur Absicherung dieser Ergebnisse gegen Stichprobeneffekte wurden ergänzend Vergleiche mit der Stichprobe der Hauptstudie des Projekts durchgeführt. Hier liegen Daten von 810 Lernenden (47,5%, weiblich) vor. Die Testungen erfolgten in 17 Gymnasial-, 20 Realschul-, drei Gemeinschaftsschul- und einer Werkrealschulklasse kurz nach Abschluss der Unterrichtseinheit lineare Funktionen. Die Lernenden waren zwischen 11 und 17 Jahren alt ( $M = 13,13$ ;  $SD = 0,93$ ).

In beiden Stichproben wurde ein von Nitsch (2015) adaptiertes Testinstrument eingesetzt, von dem für diese Studie acht innermathematische Items relevant sind. Bei zwei dieser Aufgaben sollten die Lernenden aus einer Gleichung bzw. einem Graphen die Steigung und den y-Achsenabschnitt ablesen, es war also Begriffswissen zu diesen Parametern gefordert. Sechs Items, davon zwei im offenen und vier im Multiple-Choice-Format, fokussierten auf einen graphisch-algebraischen Darstellungswechsel. Ein Item zum Ablesen der Parameter aus einer Funktionsgleichung und zwei Items zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel wurden auch den Lehrkräften vorgelegt, die erwartete Lernschwierigkeiten und Lösungsraten in ihren Klassen nennen sollten.

## **Ergebnisse**

Die Lösungsraten der vorgelegten Aufgaben zum graphisch-algebraischen Darstellungswechsel wurden von den Lehrkräften mit einer Spannweite von ~28% bis ~52% eingeschätzt. Beim Item zum Ablesen von Steigung und y-Achsenabschnitt aus einer Funktionsgleichung erwarteten alle vier Lehrkräfte durchgängig höhere Lösungsraten zwischen ~35% und ~67%.

In der Schülerstichprobe der Vorstudie zeigte sich beim Darstellungswechsel von Gleichung zu Graph, dass die offene Aufgabe am seltensten richtig gelöst wurde (15,6%) gefolgt von der Multiple-Choice-Aufgabe mit negativer Steigung (17,9%) und der Multiple-Choice-Aufgabe mit positiver Steigung (30,4%). Die Aufgabe zum Ablesen der Parameter aus einer Funktionsgleichung wurde von 10,4% der Lernenden richtig bearbeitet. In

der Stichprobe der Hauptstudie zeigte sich exakt die gleiche Reihung der relativen Lösungshäufigkeiten.

Beim umgekehrten Darstellungswechsel von Graph zu Gleichung wurde in der Stichprobe der Vorstudie die offene Aufgabe am häufigsten richtig gelöst (29,4%), während die Multiple-Choice-Aufgaben etwas seltener korrekt bearbeitet wurden (Aufgabe mit negativer Steigung: 20,0%; Aufgabe mit positiver Steigung: 17,3%). Das Item zum Ablesen von Steigung und y-Achsenabschnitt aus einem Graphen fiel den Lernenden mit einer Lösungsrate von 7,2% am schwersten. Auch bei dieser Richtung des Darstellungswechsels fand sich die gleiche Reihung von relativen Lösungshäufigkeiten in der Schülerstichprobe der Hauptstudie.

## Diskussion

Die Lehrkräfte schätzten die Aufgabe zum Begriffswissen durchgängig einfacher ein als Items, die einen graphisch-algebraischen Darstellungswechsel erforderten. Dies ist nachvollziehbar, wenn man das Identifizieren der Parameter als Grundlage für einen Darstellungswechsel betrachtet. Es zeigte sich aber eine deutliche Diskrepanz zwischen dieser Einschätzung und den empirischen Ergebnissen in den Schülerstichproben der Vor- und Hauptstudie. Die Aufgaben, die Begriffswissen zu den Parametern erforderten, wurden deutlich seltener richtig gelöst als die Items, die auf einen Darstellungswechsel abzielten. Es gibt demnach Lernende, die einen Darstellungswechsel realisieren können, ohne zu wissen, wofür die Parameter stehen. Dies deutet auf eine sehr algorithmische, rezeptartige Unterrichtskultur hin, die zwar Prozeduren vermittelt, aber wenig Wert auf Begriffswissen oder sogar Konzepte legt.

## Literatur

- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103–131.
- Hadjidemetriou, C. & Williams, J. S. (2002). Teachers' pedagogical content knowledge: graphs, from a cognitivist to a situated perspective. In: A. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of PME 26, Norwich, University of East Anglia, vol. 3*, 57-64.
- Land Baden-Württemberg (2004). *Bildungsstandards für Mathematik. Realschule – Klassen 6, 8, 10*. [http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsw/Bildungsplaene/Bildungsplaene-2004/Bildungsstandards/Realschule\\_Bildungsplan\\_Realschule\\_Gesamt.pdf](http://www.bildungsplaene-bw.de/site/bildungsplan/get/documents/lsw/Bildungsplaene/Bildungsplaene-2004/Bildungsstandards/Realschule_Bildungsplan_Realschule_Gesamt.pdf) [6.2.2018].
- Nathan, M. J. & Koedinger, K. R. (2000). An investigation of teachers' beliefs of students' algebra development. *Cognition and Instruction*, 18(2), 209–237.
- Nitsch, R (2015). *Diagnose von Lernschwierigkeiten im Bereich funktionaler Zusammenhänge. Dissertation*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Vollrath, H.-J.(1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematik-Didaktik* 10, 3–37.