Anna Susanne STEINWEG, Bamberg

Variablen im Fokus – Notation, Repräsentation, Vorstellung

Das Auftreten von Variablen im Unterricht gilt als äußeres Kennzeichen für die Thematisierung von Algebra. Algebraisches Denken als Fokussierung auf Konzepte ist grundsätzlich unabhängig vom Variableneinsatz. Deutungen von Buchstabenvariablen sind für Kinder der Primarstufe bisher im deutschsprachigen Raum weitgehend unerforscht. In einem Versuch wurde den spontanen Vorstellungen von Kindern zu Variablen in gegebenen Termrepräsentationen der Struktur von Mustern nachgespürt.

1. Mathematische Notationen als Zeichen

Mathematik zu betreiben heißt, sich mit Gedankenobjekten (Mason, 1987) und nicht mit realen Objekten zu beschäftigen. Mathematische Zeichen sind Symbole für Objekte und ihre Verknüpfungen. Um mit Zahlen im Stellenwertsystem in Ziffernschreibweise und Operationszeichen der Grundrechenarten umzugehen, sind grundsätzlich Deutungsprozesse als semiotische Akte (z. B. Dörfler, 2015; Radford, 2002; Steinbring, 2017) zu vollziehen. Gleichsam gilt die Notwendigkeit der Interpretation auch für Repräsentationen und Anschauungsmittel, die Grundvorstellungsangebote in grafischer Form darstellen (Ott, 2016; Söbbeke, 2005; Voigt, 1993).

Variablen in Buchstabensymbolen reihen sich folglich in die Reihe der Herausforderung der Deutung der Notation im Zusammenspiel mit den eigenen Handlungsvorstellungen, individuellen Erklärungsmodellen und subjektiven Erfahrungshorizonten ein (vom Hofe & Blum, 2016).

Die Ausbildung eines so genannten ‚symbol sense' ist dabei angestrebtes Ziel, um Verstehen zu ermöglichen. Mit diesem Sinn wird es möglich, "to see algebra as a tool for understanding, expressing and communicating generalizations, for revealing structure, and for establishing connections and formulating mathematical arguments (proofs)" (Arcavi, 1994, S. 24).

2. Variablen

Variablen treten in unterschiedlichen Aspekten auf. Sie können in einer Gleichung einen bestimmten Wert repräsentieren (5+x=8), sie dienen zur Beschreibung von Regelhaftigkeiten in Mustern ($n \rightarrow 2n+1$) und ebenso werden sie eingesetzt um allgemeine Eigenschaften (wie die Kommutativität der Addition a+b=b+a) zu beschreiben (Kieran, 2004; auch Strømskag, 2015; Steinweg, 2013). In der Denomination von Freudenthal (1983) sind sie somit als Unbekannte, Veränderliche oder Unbestimmte zu deuten. Buchstabenvariablen als Veränderliche in der algebraischen Grundidee

(Steinweg, 2017) funktionaler Zusammenhänge, bieten spannende Herausforderungen. Kindern ist es möglich, diese Strukturen zu beschreiben, ohne Variablen zu nutzen (Akinwunmi, 2012). Die verkürzte Notation mit Buchstaben ist jedoch eine wesentliche Errungenschaft der Mathematik.

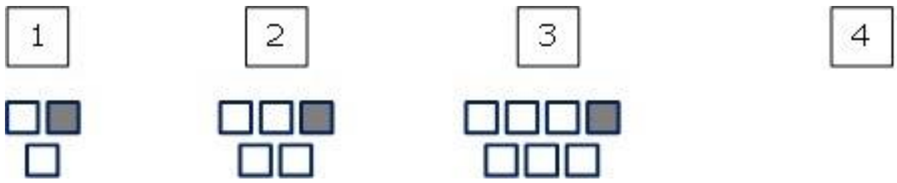

Abbildung 1: Eine diskrete Musterfolge $n \to 2n+1$

Variablen als Veränderliche in Musterfolgen aus geometrischen Objekten (Abb. 1) erwarten das Zusammenspiel einer doppelten Struktur (Radford, 2011). Die Buchstabenvariable n als Laufvariable (Index) korrespondiert mit der Position (ordinal) des geometrischen Musters in der Folge. Die Anzahlen (kardinal) der weißen oder schwarzen Objekte sind in Relation zur Ordnungszahl zu stellen.

Die Regelhaftigkeit zu erkennen oder auch zu beschreiben, ist dabei nicht zwingend an die Konventionen der algebraischen Termnotation gebunden. Die mathematisch übliche Notation unterliegt zudem willkürlichen, z. B. das Auslassen des Malpunktes bei 2n, und zu erlernenden Sprachreglungen der Algebra (Hewitt, 2009).

3. Ein Versuch

In der Tradition des kognitiven Konflikts bietet der Pilotversuch eine Konfrontation mit Variablennotation. Hierbei wurde auf strenge Einhaltung der Regeln verzichtet und Produkte durch Multiplikationszeichen angezeigt (für die Musterfolge aus Abb. 1 also $2 \cdot n+1$).

Die Begegnung mit der Termnotation der Struktur in Variablenform spielt im besten Fall mit der eigenen Entdeckung der Struktur des Musters zusammen. Nur so ist es vermutlich möglich, den Sinn der Buchstaben zu entschlüsseln und sich damit den Variablen anzunähern. Darum ist es wesentlich, zunächst selbst die Musterfolge zu untersuchen und fortzusetzen (Wie geht es weiter?) und eine erste Beschreibung als Verallgemeinerung (z. B. hier für das 100. Muster) zu erproben (Steinweg, 2014). Erst danach wird der Term als Variablennotation der diskreten Folge präsentiert und es kann versucht werden, die eigene Strukturwahrnehmung hineinzudeuten.

4. Erste Ergebnisse und Indizien

In einer kleinen Studie mit 96 Kindern aus fünf jahrgangsgemischen Klassen (3./4.) konnten Indizien verschiedener Einflussfaktoren auf die Interpretation der Termrepräsentation ausgemacht werden. So spielt vermutlich das angebotene Muster selbst eine Rolle, die sich aber noch nicht einheitlich identifizieren lässt. Zudem scheint das Alter bzw. Schulbesuchsjahr der Kinder einen Einfluss zu haben. Der Versuchsaufbau erwartet, dass die selbstständige Suche nach der Fortsetzung des Musters sowie die individuelle Beschreibung des 100. Musters einen Einfluss auf die Termdeutung haben. In dieser Studie war die korrekte Fortsetzung des Musters notwendig, aber nicht hinreichend für eine vollständige Terminterpretation. Das verallgemeinernde Beschreiben zeigte hingegen überraschend wenig Einfluss: Selbst bei keiner eigenen oder einer individuellen Verallgemeinerung waren zumindest (Teil-)Erklärungen des Terms möglich.

5. Ausblick

Den ersten Indizien ist selbstverständlich in weiteren Studien nachzugehen. Hierbei scheint es fruchtbar, individuellen Verstehensprozessen in Interviewstudien genauer nachzuspüren. Auch der Alterseinfluss müsste näher geklärt werden, z. B. durch Studien in den Jahrgängen 5/6 oder 7/8. Aufgrund des Einflusses der Aufgabe selbst, sind in Folgestudien Variationen der Aufgaben oder auch angebotener Materialhandlungen denkbar.

Buchstabenvariablen für die Erarbeitungen von Kalkülen sind zu Recht kein Element des Primarunterrichts. Es stellt sich dennoch die Frage, ob der vielfach beklagte Bruch zwischen Algebra und Arithmetik (z. B. Bill et al., 2003) nicht sogar durch den jetzt üblichen, singulären Fokus auf Variablen als Unbekannte (z. B. Mister x) verstärkt wird. Die anspruchsvolle Begegnung mit Variablen, die wirklich variieren (einen Zahlbereich durchlaufen) und als Veränderliche in diskreten Musterfolgen auftreten, ist in ihren Chancen und Möglichkeiten noch zu wenig beachtet. Gleiches gilt auch für Variablen als Unbestimmte $\forall n \in \mathbb{N}$ zur Darstellung von Eigenschaften von Zahlen und Operationen (Mathematische Strukturen).

Literatur

Akinwunmi, K. (2012). *Zur Entwicklung von Variablenkonzepten beim Verallgemeinern mathematischer Muster*. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. *For the Learning of Mathematics, 3*(14), 24–35.

Bills, L., Ainley, J., & Wilson, K. (2003). Particular and General in Early Symbolic Manipulation. In N. A. Paterman, B.J. Dougherty & J. Ziliox (Hrsg.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 2, S.105–112). Honolulu: PME.

Dörfler, W. (2015). Abstrakte Objekte in der Mathematik. In G. Kadunz (Hrsg.), *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik* (S. 33–49). Heidelberg u.a.: Spektrum.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Boston, Lancaster: Kluwer.

Hewitt, D. (2009). The role of attention in the learning of formal algebraic notation: The case of a mixed ability year 5 using the software Grid Algebra. *BSRLM (British Society for Research into Learning Mathematics) Proceedings of the Day Conference held at Loughborough University, 29*(3), 43–48.

Hofe, R. vom, & Blum, W. (2016). ‚Grundvorstellungen' as a Category of Subject-Matter Didactics. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37* (suppl. 1), 225–254.

Kieran, C. (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Hrsg.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (S. 21–33). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J. (1987). Erziehung kann nur auf die Bewußtheit Einfluß nehmen. *mathematik lehren, 21,* 4–5.

Ott, B. (2016). *Textaufgaben grafisch darstellen – Entwicklung eines Analyseinstruments und Evaluation einer Interventionsmaßnahme*. Münster: Waxmann.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22*(2), 14–23.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. In B. Ubuz (Hrsg.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Bd. 4. S. 17–24). Ankara: PME

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern. Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel*. Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (2017). Von Dingen, Worten und mathematischen Symbolen. In A. S. Steinweg (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 7: Mathematik und Sprache* (S. 25–40). Bamberg: UBP.

Steinweg, A. S. (2013). *Algebra in der Grundschule: Muster und Strukturen, Gleichungen, funktionale Beziehungen.* Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Steinweg, A. S. (2014). Muster und Strukturen zwischen überall und nirgends - Eine Spurensuche. In dies. (Hrsg.), *Mathematikdidaktik Grundschule - Band 4: 10 Jahre Bildungsstandards* (S. 51–66). Bamberg: UBP.

Steinweg, A. S. (2017). Key ideas as guiding principles to support algebraic thinking in German primary schools. In T. Dooley & G. Gueudet (Hrsg.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1 – 5, 2017)* (S. 512–519). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Strømskag, H. (2015). A pattern-based approach to elementary algebra. In K. Krainer & N. Vondrova. *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp.474–480). Prague: ERME.

Voigt, J. (1993). Unterschiedliche Deutungen bildlicher Darstellungen zwischen Lehrerin und Schülern. In J. H. Lorenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 147–166). Köln: Aulis.