Wilhelm STERNEMANN, Lüdinghausen

Zwischenzeitlicher Zins im 17. Jahrhundert bei Leibniz und Bernoulli – Vergleich zweier historischer Schriften zu Zinsen von Leibniz 1683 und Jakob Bernoulli 1690

Zur „stetigen Verzinsung“ in den „Quaestiones“: Ein kleiner Abschnitt in Jakob Bernoullis „Quaestiones“ (Bernoulli, 1690, 2) verdient u.a. deswegen Aufmerksamkeit, weil dort erstmals die Idee der stetigen Verzinsung veröffentlicht wurde. Sie ist in der elementaren Analysis didaktisch hervorragend geeignet für eine „genetische“ Einführung der Eulerschen Zahl e und der e-Funktion (z.B. Toeplitz 1949). Zum genauen Inhalt der Schrift findet man in der Literatur kaum etwas. Bis heute ist keine vollständige veröffentlichte Übersetzung aus dem Lateinischen bekannt. Der kurze Abschnitt zum stetigen Zins (Sternemann 2015) beinhaltet Erstaunliches. Bernoulli gab für die in einem Jahr entstandene Summe als Lösung eine Exponentialreihe an und „*erkannte*“ dazu noch dieselbe Reihe bei passender Deutung ihrer Variablen als Formel für die damals so genannte „Curva Logarithmica“, die heutige „Exponentialkurve“. Die Herleitung dieser beiden Behauptungen hielt Bernoulli im privaten Notizbuch „Meditatio“ unter Nr. 150 und 177 geheim (Weil, 1993). Beide Rechnungen enthielten als entscheidenden Bestandteil die Bestimmung des Grenzwertes von $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ für $n \to \infty$ zu $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cdots$. Diese heute wohlbekannte Umformung tritt hier, soweit bekannt, erstmals auf, ein Meilenstein in der Geschichte der Analysis.

Der Grenzübergang bei Benutzung von $\frac{n-k}{n} \approx 1$ genügte nicht den heutigen Ansprüchen an Strenge und kann in dieser Weise auch zu Fehlschlüssen führen. Interessant ist aber, dass diese anfechtbare Rechnung fast gleichlautend auch in Eulers epochaler „Introductio“ vorkam, wo zum ersten Mal die Reihe als Potenz e^x erkannt wurde. Möglicherweise hat Euler diese Rechnung in den Schriften von Jakob Bernoulli gesehen. Die Familie Euler war bekanntlich durch mehrere Freundschaften mit der Familie Bernoulli verbunden und Euler selbst, 2 Jahre nach Jakob Bernoullis Tod geboren, hat mehrmals dessen großen Einfluss auf ihn betont.

Erst 1704, ein Jahr bevor er starb, veröffentlichte Bernoulli in der 5. Reihendissertation die im geometrischen Kontext der Curva Logarithmica gehaltene Herleitung der Meditatio 177. Die rein numerisch im Kontext der stetigen Verzinsung gehaltene Herleitung in der Meditatio 150 blieb unveröffentlicht und wurde vermutlich erst gegen Ende des 20ten Jahrhunderts u.a. im Band 4 der Baseler Werksausgabe öffentlich zugänglich gemacht.

Eine Verbindung von der „Meditatio“ zu den „Quaestiones“: In der Bernoulli-Forschung wird mehrfach ohne weiteren Beleg behauptet, dass Bernoulli zu den „Quaestiones“ durch die „Meditatio“ (Leibniz 1683), einer Leibniz-Schrift zu Alltagszinsen, angeregt wurde. (Hofmann 1956, S.16) und (Weil 1993, S.160). Von Bernoulli ist dazu allerdings bisher kein Wort bekannt. Auch umgekehrt hat später Leibniz die Schrift „Quaestiones“ nie erwähnt. Im Gegensatz dazu hat Leibniz eine andere Bernoullis Schrift „Linea“ (Bernoulli 1690, 1), die im gleichen Heft auf derselben Seite endete, wo die „Quaestiones“ begannen, im nächsten Jahr lobend erwähnt, und zusätzlich auch für den mitwirkenden jüngeren Bruder Johann ausdrückliches Lob geäußert. Verdient hatten sich die Bernoulli-Brüder das Lob, da sie als erste außerhalb des engeren Korrespondenzkreises um Leibniz den Calculus selbständig verstanden und ihn zur Lösung einer von Leibniz im Vorjahr in der Schrift „Linea“ gestellten physikalischen Aufgabe angewandt hatten.

Zu der „Meditatio“, die nur über Alltagzinsen ging, wird man Indizien für eine Verbindung am wahrscheinlichsten in dem längeren Anfangsteil der „Quaestiones“ finden, der von Alltagszinsen handelte. Dieser Abschnitt blieb in der Literatur anders als der bedeutsamere kurze Abschnitt zur stetigen Verzinsung praktisch unbekannt und unbeachtet. Sein Inhalt soll nun vergleichend zu dem in der „Meditatio“ wiedergegeben werden. Dazu wurde vom Verfasser zusammen mit dem Latinisten StD Georg Möllers aus Heek eine Übersetzung aus dem Lateinischen erstellt und beide Schriften vergleichend nach Auffälligkeiten durchsucht. Die Übersetzung und die vergleichenden Betrachtungen sollen in Kürze ausführlicher als Aufsatz erscheinen. An dieser Stelle sei auszugsweise darüber berichtet.

Zur „Meditatio“: Leibniz stand 1683 schon fast ein Jahrzehnt als Hofrat in den Diensten von Herzog August von Hannover und hatte trotz unglaublich hoher Arbeitsbelastung schon mehrere Jahre an Entwürfen zu Renten- und Versicherungssystemen gearbeitet, wozu auch die Schrift „Meditatio“ im weiteren Sinne gehörte. Bei der Frage nach Rabatt für vorzeitige Rückzahlungen untersuchte er, „*um wieviel weniger billigerweise derjenige zu bezahlen habe, der jetzt bezahlt, obwohl er erst nach einigen Jahren dazu verpflichtet wäre.*“ (Übers. Knobloch 2000, S. 273). Kunstvoll begann Leibniz mit einer Definition von Rabatt und stellte Hypothesen („*suppositia*“) auf, z.B. dass dieser Rabatt wie Zins berechnet werden müsse, aber nicht dem Verbot des geächteten Zinseszinses unterliegen könne. Unter dem „*Postulatum*“, dass die Kontrahenten sich einig seien, gewann er das

Ergebnis, dass bei einer um ein Jahr zu frühen Rückzahlung nur die Summe $\frac{1}{x+1} \cdot S$ an Stelle der Schuldsumme S zu entrichten sei, wobei x den Zinssatz pro Jahr bezeichnet. Zu diesem Ergebnis kommt man leicht mit einfacher Prozentrechnung. Interessant ist die von Leibniz bevorzugte alternative Rechnung, die er in einen unendlichen Dialog zwischen Gläubiger(G.) und Schuldner(S.) über ein Jahr zu früh einbehaltene Zinsen und deren Verzinsung einkleidete und zur alternierenden geometrischen Reihe $(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots) \cdot S$ mit im Unendlichen gleichem Ergebnis führte. Im Fall von $2, 3, \ldots$ und a Jahren gab Leibniz $\left(\frac{1}{1+x}\right)^a \cdot S$ (noch in der alten Potenzschreibweise „$\boxed{a}\,\frac{1}{1+x} \cdot S$“) an. Die Koeffizienten der zugehörigen Reihen, nun auch in mehrjährig geführte Dialoge eingekleidet, finden sich in der „Meditatio“ als „*kombinatorische Zahlen*“ wieder. In den die Meditatio begleitenden Handschriften gibt es diese Zahlen auch formelmäßig in voller Allgemeinheit. Interessant ist, dass sich in diesen Zahlen (wegen $\left(\frac{1}{1+x}\right)^a = (1+x)^{-a}$) die auf negative Exponenten erweiterten binomischen Formeln verbergen mit der unendlichen Fortsetzung des Pascaldreiecks nach oben und rechts (Meyer, 2010).

Zum Abschnitt über „Alltagszinsen“ in den „Quaestiones“: Ein Zusammenhang zur „Meditatio“ zeigt sich deutlich am Ende der Einleitung: „*Es geschieht aber gelegentlich, dass bei schon zum größten Teil beglichenen Schulden einer vom anderen geschuldete aber nicht fällige Geldbeträge verlangt;“* (Übersetzung Sternemann/Möllers). Bernoulli kannte die Gelehrtenzeitschrift AE seit ihrer Gründung als Mitautor und daher sicher auch die „Meditatio“. Zwischen 1683 und 1690 findet man in der AE keine anderen mathematischen Beiträge zu Zinsen. Diese gemeinsame Ausgangssituation der vorzeitigen Rückzahlung einer Schuldsumme ist ein direktes Indiz für eine Verbindung zwischen den beiden Schriften, welches die Vermutung der Autoren J. E. Hofmann und A. Weil bestätigt.

An Stelle von Gemeinsamkeiten findet man aber weiterhin praktisch nur Eigenschaften und Aussagen, die deutlich konträr zu denen von Leibniz stehen. Der wohl gravierendste Unterschied liegt im wichtigsten Anliegen von Leibniz, dem Schuldner Rabatt für die vom G. verursachte Vorzeitigkeit der Rückzahlung zu geben. Ein Rabatt bleibt aber bei Bernoulli unerwähnt und wird konträr zu Leibniz in den Rechnungen ersatzlos gestrichen. Auch das Fehlen einer Zielformulierung oder einer Anfangsfrage zum Teil der „Quaestiones“ über Alltagszinsen, die die Leibnizfrage nach dem Rabatt ersetzen könnte, empfindet der Verfasser als konträr zur „Meditatio“. Weiterhin war ein „Postulat“, dass sich S. und G. geeinigt haben. Bernoulli schreibt: *„Dazu überlegt zum Einen der Gläubiger und zum Andern der Schuldner.“*(Übersetzung Möllers/Sternemann), also denken G. und S. verschieden. Leibniz bespricht eine einzige vorzeitige Zahlung. Aber Bernoulli betrachtet drei verschiedene Rückzahlungen zu drei verschiedenen Zeitpunkten. Dies war der Anfang einer längeren Liste konträrer Einzelheiten.

Im Verlauf des Textes lässt Bernoulli zunächst den G. seine „*Überlegungen*“ anstellen. Es werden bei jeder Zahlung die zur Summe zwischenzeitlich angelaufenen Zinsen bezahlt und die Tilgung von der Schuldsumme abgezogen, dies drei Mal. Eine normale Abwicklung, wenn die Möglichkeit von Zwischentilgungen vereinbart war, und uninteressant für Leser der Gelehrtenzeitschrift im Gegensatz zur Regelung bei Leibniz. Schwieriger sind die dann folgenden „*Berechnungen*“ nachzuvollziehen, die Bernoulli den S. anstellen lässt und schließlich für fehlerhaft erklärt. Der Verfasser sieht dort Unstimmigkeiten und wird versuchen, sie in dem genannten Aufsatz sorgfältig aufzuzeigen.

Abschließend sei bemerkt, dass Bernoulli die hier nur in unvollständiger Auflistung angedeuteten konträren Positionen sicherlich nicht unabsichtlich eingenommen hat. Offen ist für den Verfasser die Frage geblieben, was er denn Substantielles bzw. Neues zu Alltagszinsen sagen wollte und welche Motive ihn zu diesem Text veranlasst haben.

Quellen und Literatur (zeitlich geordnet)

Leibniz, G. G. (1683), Meditatio Juridico Mathematica de Interusurio simplice, *Acta Eruditorum,* Oct. 1683, S. 425 – 432 [und in Knobloch et al. (2000), S. 273 – 299].

Leibniz, G. G. (1689), De Linea Isochrona in qua grave sine acceleratione descendit, *Acta Eruditorum,* April 1689, S. 195 – 198.

Bernoulli, Jacob (1690, 1), Analysis Problematis antehac Propositi, de inventione linea descensus a corpere gravipercurrenda uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiatur: …, *Acta Eruditorum,* Mai 1690, S. 217 – 219.

Bernoulli, Jacob (1690, 2), Quaestiones Nonnullae de Usuris, *Acta Eruditorum,* Mai 1690, S. 219 – 223.

Toeplitz, O. (1949), *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung.* Aus dem Nachlass posthum herausgeg. von G. Köthe. Berlin – Göttingen – Heidelberg: Springer.

Hofmann, J. E. (1956), *Ueber Jakob Bernoullis Beiträge zur Infinitesimalmathematik* Genève, L' Enseignement Mathématique, Série II, Tome II.

Weil, A. (1993), *Die Werke Jakob Bernoullis*, Band 4, Basel: Birkhäuser.

Knobloch E. und Graf von der Schulenburg, J.-M. (2000), *G.W. Leibniz Hauptschriften zur Versicherungs- und Finanzmathematik*, Berlin: Akademie Verlag.

Meyer, J. (2010), Interpolation von Binomialkoeffizienten, *Mathematikinformation,* Nr. 53, 15. Sept. 2010, S. 23 – 40.

Sternemann, W. (2015), Die stetige Verzinsung bei Jakob Bernoulli, *Mathematische Semesterberichte,* Bd. 62, Okt. 2015, S. 159 – 172.