Ann Sophie STUHLMANN, Hamburg

Beweisprozesse von Mathematiklehramtsstudierenden in der Studieneingangsphase

In diesem Beitrag wird ein Forschungsvorhaben vorgestellt, in dem kollektive Beweisprozesse von Mathematiklehramtsstudierenden aus einer interaktionistischen Perspektive untersucht werden. Unter Beweisprozessen werden in Anlehnung an ein Prozessmodell von Boero (1999) sowohl explorative Tätigkeiten zum Finden von Vermutungen wie auch deduktive Vorgehensweisen zusammengefasst.

Die ersten Semester sind für Mathematiklehramtsstudierende oft mit großen Problemen verbunden. Die Abbrecherquoten in der Studieneinstiegsphase sind im Vergleich zu anderen Studiengängen extrem hoch (z.B. Dieter et al. 2008). Ein wesentlicher Grund für dieses Phänomen scheint der axiomatische Aufbau der Hochschulmathematik zu sein. Während das Vorgehen im Mathematikunterricht als inhaltlich-anschaulich beschrieben werden kann, ist die Mathematik an der Universität durch eine deduktive Arbeitsweise charakterisiert. Insbesondere stellt das Konstruieren von Beweisen ab Beginn des Mathematikstudiums die zentrale Aktivität für Studierende dar (Fischer, Heinze & Wagner 2009). Untersuchungen der Beweisprozesse von Mathematiklehramtsstudierenden liefern wichtige Erkenntnisse zur Problematik des Studieneinstiegs und stellen eine Grundlage für die Entwicklung von Unterstützungsmaßnahmen in der Studieneingangsphase dar.

Forschungsstand zu individuellen Aspekten in Beweisprozessen

Empirische Studien aus der Mathematikdidaktik zu Beweisprozessen im universitären Kontext beziehen sich mehrheitlich auf die Bedeutung individueller Aspekte. Entsprechende Forschungsergebnisse werden im Folgenden in Anlehnung an ein Framework von Reiss und Ufer (2009) dargelegt, in dem sechs Prädiktoren für mathematische Beweisprozesse herausgestellt werden: Unter *Methodenwissen* wird „das Wissen über die Natur und die Funktion von Beweisen“ (S.11) zusammengefasst (ebd.). Forschungsergebnisse zur Rolle des Methodenwissens in Beweisprozessen von Mathematikstudierenden beziehen sich meist auf Schwierigkeiten, die aus Wissensdefiziten erwachsen (z.B. Selden & Selden 2003). *Mathematisches Basiswissen* umfasst das Wissen zu den grundlegenden Begriffen, Definitionen und Sätzen in einem Inhaltsbereich. Es wurde mehrfach gezeigt, dass Schwierigkeiten von Mathematikstudierenden bei der Konstruktion von Beweisen häufig mit einem geringen mathematischen Basiswissen zusammenhängen (z.B. Moore 1994). *Mathematisch-strategisches Wissen* umfasst inhaltsspezifische Beweisstrategien. Die Bedeutung dieses Wissens für den Beweisprozess konnte beispielsweise von Weber (2001) gezeigt werden. Ein Beispiel für eine inhaltsspezifische Strategie ist das typische Vorgehen, Mengengleichheit mittels einer doppelten Inklusion zu zeigen. Des Weiteren zählen allgemeine *Problemlösestrategien* zu entscheidenden Einflussfaktoren im Beweisprozess (Ufer & Reiss 2009). Hiermit sind sowohl heuristische als auch metakognitive Strategien gemeint. Der Einfluss *affektiver Aspekte* auf Beweisaktivitäten konnte z.B. von Furinghetti und Morselli (2009) rekonstruiert werden. Diese beobachteten in einer empirischen Untersuchung den gestalterischen Einfluss der Beliefs von Mathematikstudierenden auf ihre Beweisprozesse.

Forschungsstand zu sozialen Aspekten in Beweisprozessen

Zum Einfluss sozialer Aspekte auf Beweisprozesse von Mathematikstudierenden gibt es bisher wenige Erkenntnisse. Blanton und Stylinaou (2003) rekonstruierten in Anlehnung an Yackel und Rasmussen (2000) den Einfluss soziomathematischer Normen auf Beweisaktivitäten im Hochschulunterricht. Remillard (2009) identifizierte soziale Faktoren in Beweisdiskursen unter Mathematikstudierenden und Lehrenden. Zu diesen Faktoren gehören unter anderem das Verhältnis zwischen prozess- und inhaltsbezogenen Beiträgen, das Verhandeln über effektive Kommunikationsformen und das Machtgefälle zwischen Diskurspartnerinnen und -partnern.

Interaktionistische Perspektive auf kollektive Beweisprozesse von Studierenden

Das in diesem Beitrag dargelegte Forschungsvorhaben setzt bei der Frage nach sozialen Aspekten in studentischen Beweisdiskursen an. Mathematiklehramtsstudierende bearbeiten im Rahmen der mathematischen Einführungsvorlesungen wöchentlich Übungsaufgaben, bei denen es meist um die Konstruktion kurzer Beweise geht. Die Studierenden arbeiten dabei regelhaft mehrere Stunden jede Woche eigenverantwortlich in Kleingruppen zusammen. Es ist davon auszugehen, dass die Kleingruppenarbeit eine zentrale Gelegenheit zum Erlernen des Beweisens darstellt. Im dargelegten Forschungsvorhaben wird untersucht, wie Mathematiklehramtsstudierende kollektive Beweisprozesse gestalten. Dabei werden folgenden Forschungsfragen bearbeitet: Welche Deutungs- und Handlungsmuster lassen sich in den Beweisprozessen rekonstruieren? Wie wird im Beweisprozess fachlich argumentiert? In welchem Zusammenhang stehen soziale und fachliche Aspekte im Beweisprozess?

Die dem Vorhaben zu Grunde liegende Untersuchung ist qualitativ orientiert. Als empirische Grundlage des Vorhabens dienen Audioaufnahmen von Beweisdiskursen zur Vorlesung *Lineare Algebra und Analytische Geometrie*, die im Rahmen einer freiwilligen Begleitveranstaltung stattfanden. Etwa 15 Studierende arbeiteten in Dreier- und Vierergruppen an den wöchentlichen Übungsaufgaben. Die kollektiven Beweisaktivitäten werden aus einer sozial-konstruktivistischen Perspektive analysiert, deren theoretische Grundlage der symbolische Interaktionismus bildet. Zur Datenauswertung werden entsprechend interaktionistische Ansätze der interpretativen Unterrichtsforschung herangezogen (z.B. Krummheuer & Naujok 1999).

Auswertung am Beispiel eines Beweisprozesses zur Gleichheit von Endomorphismenmengen

Der folgende Transkriptausschnitt stammt aus einer Kleingruppenarbeit dreier Lehramtsstudierender, die beweisen sollen, dass zwei Vektorräume V und $\bar{V}$ die gleichen Endomorphismen haben. Die beiden zu betrachtenden Vektorräume haben die gleiche abelsche Gruppe, aber unterscheiden sich in ihrer skalaren Multiplikation.

1	Alex	jetzt müssen wir nur gucken, müssen wir nur zeigen, dass sie durch f auf dieselben Elemente wieder abgebildet werden.
2	Doro	aber mhm (3) werden sie das überhaupt? es muss ja nicht.
3	Alex	doch das müssen sie. zwei Endomorphismen sind genau dann gleich, wenn sie jedes Element auf dasselbe Element abbilden.
4	Doro	aber es muss ja nicht. sozusagen dieses f muss ja nicht genau das gleiche Element sein wie hier drinne, sondern du kannst sie ja so über Kreuz machen, äh, indem du konjugierst. also, äh, es soll ja nur die Menge gleich sein.
5	Erik	ja.
6	Doro	nein es soll aber nicht jedes einzelne.
7	Alex	aber die Endomorphismen die Endomorphismen sollen gleich sein. die sollen nicht irgendwie es soll nicht zwei Verwandte geben, sondern sie sollen gleich sein.

In der dem Transkriptausschnitt vorausgehenden Interaktion wird deutlich, dass die drei Studierenden die Überzeugung teilen, dass zu zeigen sei, dass die Endomorphismenmengen der beiden Vektorräume übereinstimmen. Alex leitet hieraus ab, dass zu zeigen sei, dass es zu einem beliebigen Endomorphismus f auf dem Vektorraum V einen Endomorphismus $\tilde{f}$ auf dem Vektorraum $\tilde{V}$ gibt, der mit f übereinstimmt. Doro hingegen folgert aus der geteilten Überzeugung, dass der einzelne Endomorphismus nicht betrachtet werden könne bzw. müsse, da nur die Mengen der Endomorphismen gleich sein sollen. In der Interaktion werden diese unterschiedlichen Vorgehensweisen von Alex und Doro sprachlich an der Verwendung des Elementbegriffes verdeutlicht: Während Alex von den Elementen des Vektorraumes spricht, meint Doro mit dem Begriff die Endomorphismen. Alex setzt *innerhalb* der Endomorphismenmengen bei einem beliebigen Endomorphismus an; Doro hingegen betrachtet die Endomorphismenmengen zusammengefasst von *außerhalb*. Dieses Phänomen der unterschiedlichen Weisen des Vorgehens im Kontext von Abbildungsmengen lässt sich in den Daten mehrfach finden und soll interaktionsanalytisch näher untersucht werden.

Literatur

Blanton, M. L., Stylianou, D. A. & David, M. M. (2003). The nature of scaffolding in undergraduate students' transition to mathematical proof. In Prooceedings of the 27th Annual Meeting for the International Group for Psychology of Mathematics Education (Vol 2., pp. 113-120). Honolulu, Hawaii: PME.

Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Juli/August 1999. http://www.lettredelapreuve.org/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeUK.html

Dieter, M., Brugger, P., Schnelle, D. & Törner, G. (2008). Zahlen rund um das Mathematikstudium – Teil 3. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 16(3), 176-182.

Fischer, A., Heinze, A. & Wagner, D. (2009). Mathematiklernen in der Schule – Mathematiklernen an der Hochschule: die Schwierigkeiten von Lernenden beim Übergang ins Studium. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium. Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht (S. 245-264). Münster: Waxmann.

Furinghetti, F. & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. Educational Studies in Mathematics, 70, 71-90.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics, 27, 249-266.

Reiss, K. & Ufer, S. (2009). Was macht mathematisches Arbeiten aus? Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (DMV), 111(4), 155–177.

Selden, A. & Selden, J. (2003). Errors and Misconceptions in College Level Theorem Proving. In J. D. Novak (Hrsg.), Proceedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics, Vol. III (p. 456-470). Ithaca: Cornell University.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48, 101-119.

Yackel, E., Rasmussen, C. & King, K. (2000). Social and sociomathematical norms in an advanced undergraduate mathematics course. Journal of Mathematical Behavior, 19, 275-287.