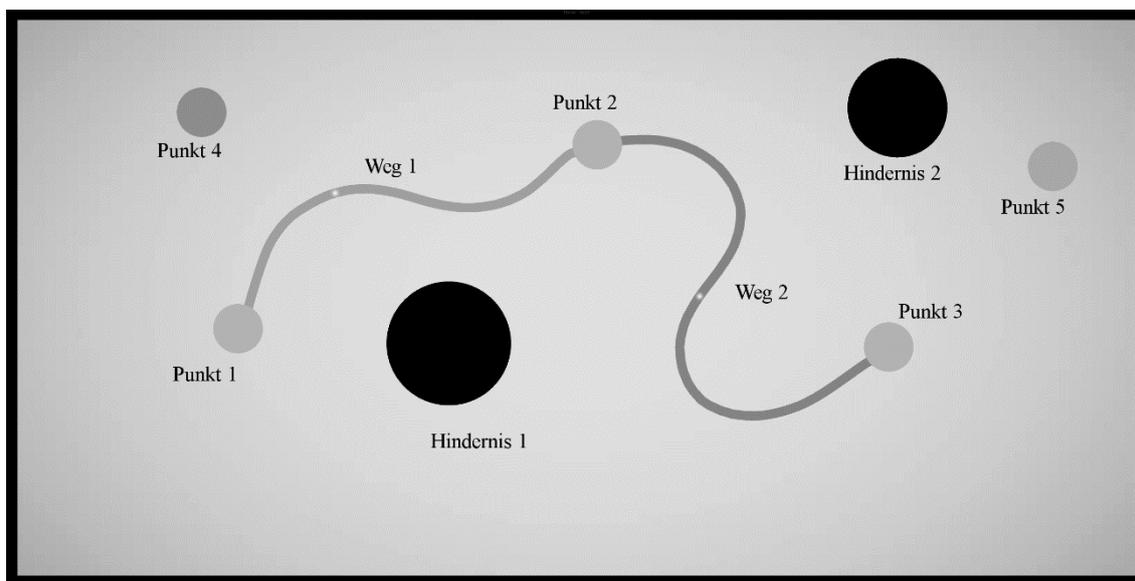


Touchbasierte Lernumgebung für Homotopien

In diesem Beitrag stelle ich kurz und informell eine Lernumgebung namens *Ariadne* in Form eines Tablet-PC-Programms vor. Es ist schwierig, solch ein dynamisches Programm in dieses graue statische Format zu fassen, der geneigte Leser ist daher eingeladen sich die Videos über *Ariadne* auf meiner Homepage anzuschauen oder es auf einem Gerät mit Touchfunktion selber auszuprobieren (www.mathedidaktik.uni-koeln.de/11924.html).

Die Forschungsfrage meiner Dissertation lautet, ob man mit dieser Lernumgebung in der Lage ist, das Konzept von Homotopien zu verstehen. Meine Zielgruppe ist die Primarstufe, um einen möglichst unvoreingenommenen Blick auf Mathematik zu ermöglichen.

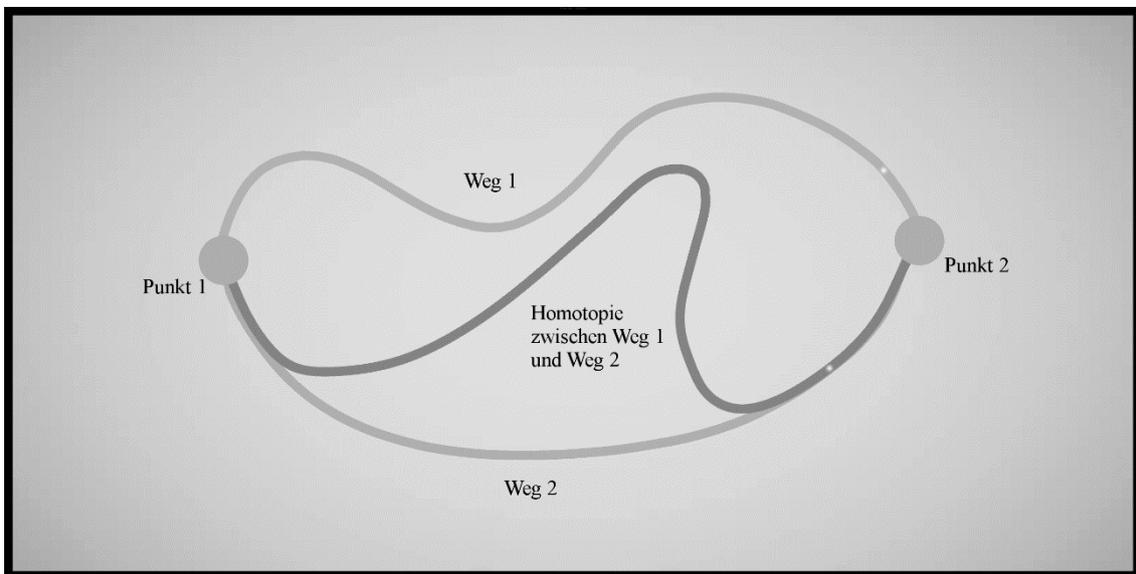
Zunächst ist im Programm nur ein graues Feld mit schwarzen Bereichen zu sehen. Durch Berührung des Bildschirms kann man nun Punkte auf dem Feld setzen, aber nicht auf den schwarzen Bereichen. Die schwarzen Bereiche spielen mathematisch die Rolle von „Ausparungen“ bzw. „Hindernissen“ der Ebene. Durch Ziehen der Punkte mit dem Finger entstehen Wege zwischen Punkten, wobei diese nicht die Hindernisse queren können. Dabei erhalten durch Wege verbundene Punkte dieselbe Farbe, um diese Beziehung der Verbundenheit zu verdeutlichen.



Screenshot 1: Punkte, Wege und Hindernisse (annotiert wegen Schwarz-Weiß-Druck)

Zwei aneinander anknüpfbare Wege, das heißt bei denen der Endpunkt des einen Weges Startpunkt des anderen ist, können durch gleichzeitige Berührung von je einem Finger verbunden werden.

Nun gibt es auch „Wege zwischen Wegen“, sogenannte Homotopien. Diese werden durch das Ziehen eines Weges mit einem Finger realisiert. Sobald man einen Weg vollständig auf einen anderen Weg gezogen habe, bekommen auch diese beiden Wege dieselbe Farbe. Solche Wege heißen „homotop“ zueinander. Auch hier stellen die schwarzen Bereiche wieder Hindernisse dar. Ein Sonderfall stellt das Ziehen eines Weges mit dem gleichen Start- und Endpunkt auf ebendiesen dar, solch einen Weg nennt man „nullhomotop“.



Screenshot 2: Eine Homotopie zwischen zwei Wegen (annotiert wegen Schwarz-Weiß-Druck)

Eine weitere Funktion von *Ariadne* ist die Anzeige der sog. „Windungszahl“ eines Weges um ein Hindernis. Nicht dargestellt, aber ebenfalls im Programm implementiert sind dreidimensionale Objekte wie der Torus oder die Kugel, auf denen wie auf dem Feld Punkte gesetzt und Wege gezogen werden können.

Diese Lernumgebung beruht auf Mathematik aus dem Teilgebiet der algebraischen Topologie. Für Informationen über diese konsultiere man Lehrbücher wie Hatcher, 2003 oder Bredon, 2013.

Nur mithilfe dieser einfachen Funktionen können sowohl einfache als auch sehr komplexe Aufgaben aufgeworfen und bearbeitet werden. Das Vokabular gilt es natürlich dem Entwicklungsstand des Kindes anzupassen, möglicherweise auch von ihm selber wählen zu lassen. Verschiedene Fragen, in verschiedener Schwierigkeit, sind beispielsweise:

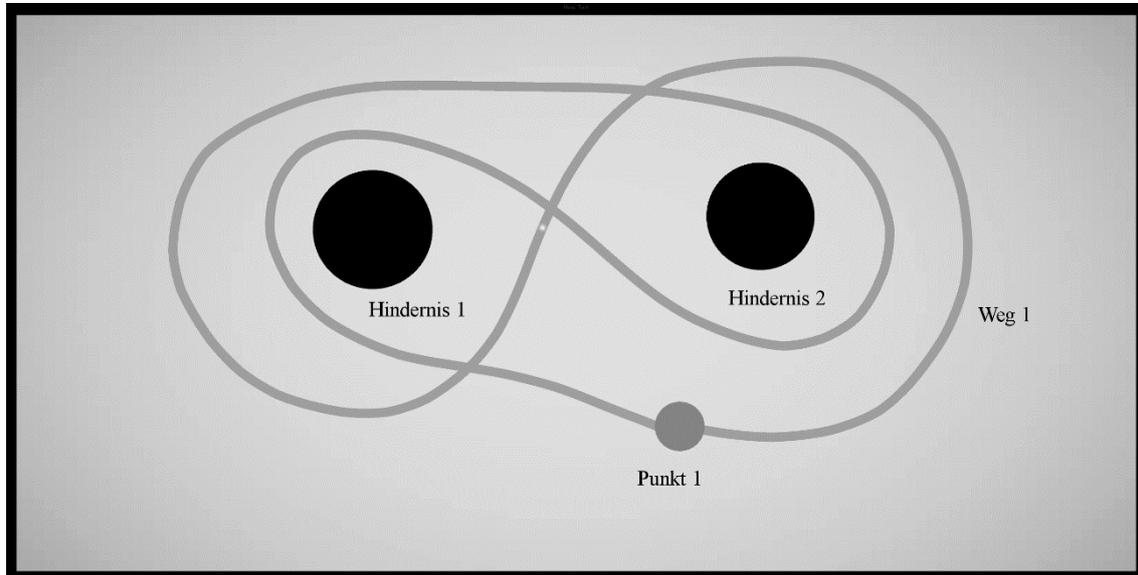
1. Welche Punkte kann man verbinden?
2. Wie viele verschiedene Farben der Punkte gibt es minimal in diesem Bild?
3. Kann man diesen Weg zu diesem anderen umformen?
4. Sind diese Wege nullhomotop? Sind sie zueinander homotop? Was ist ihre Windungszahl?
5. Wie viele verschiedene, das heißt nicht homotope, Wege gibt es hier?
6. Kann man Hindernisse setzen, so dass dieser Weg nicht nullhomotop ist?
7. Kann man einen Weg mit Windungszahl 3 malen?
8. Wie viele verschiedene Wege gibt es hier?

Dies sind alles genuine mathematische Fragen aus der algebraischen Topologie. Manche dieser Fragen sind auch für Grundschul Kinder schnell zu beantworten, andere brauchen viel Arbeit in Form von Beispielen und Gegenbeispielen. Dabei kann auch die zugrundeliegende mathematische Struktur genutzt werden. Beispielsweise gibt es einen Weg von Punkt A zu Punkt C, falls es einen Weg von A nach B und von B nach C gibt. Dem ist so, da „homotop zu“ eine Äquivalenzrelation ist. Dies kann genutzt werden, ohne den Begriff der Äquivalenzrelation explizit einzuführen, und somit das Denken in mathematischen Strukturen fördern.

Das Thema Homotopien und Wege bietet sich für Computerumgebungen an, da es keine physikalischen Materialien mit den gewünschten Eigenschaften eines Weges gibt. Ein solches Material müsste beliebig verformbar und dehnbar sein. Kandidaten wie Lehm (Nobel Committee for Physics, 2016) oder Gummibänder (Szpiro, 2008) erfüllen dies zwar teilweise, haben aber natürliche Grenzen. Mithilfe des Computers können diese Grenzen überwunden werden. Die fehlende Haptik lässt sich durch den Touchscreen teilweise ausgleichen.

Ein weiteres durch *Ariadne* angesprochenes Thema ist das *Machen* von Mathematik im Gegensatz zum *Wissen* darüber (Papert, 1972). Das bedeutet in hier die Konstruktion von Objekten durch den Benutzer, um Fragen aufzuwerfen oder zu beantworten. Aufgestellte Hypothesen über diese Objekte

können durch Ausprobieren bestätigt oder widerlegt werden, ohne eine externe Autorität, wie beispielsweise einen Lehrer, zurate ziehen zu müssen.



Screenshot 3: Der "Pochhammer-Weg", ein nicht nullhomotoper Weg mit Windungszahl 0 um zwei Hindernisse (Siehe z.B. Wang, 1989, S. 105) (annotiert wegen Schwarz-Weiß-Druck)

Nicht zuletzt ist es ein interessanter Aspekt, ein zentrales Thema der modernen Mathematik elementar vermitteln zu können.

Die Lernumgebung wurde bisher nur mit zwei Erwachsenen Nicht-Mathematikern probeweise getestet, der nächste Schritt ist die Analyse vermög qualitativer Untersuchungen mit Grundschulkindern.

Literatur

- Bredon, G. E. (2013). *Topology and Geometry* (Vol. 139). New York: Springer Science & Business Media.
- Hatcher, A. (2003). *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Nobel Committee for Physics (2016). *Popular science background: Strange phenomena in matter's flatlands*. Stockholm: The Royal Swedish Academy of Sciences. Zuletzt zugegriffen am 05. April 2018 unter https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2016/popular-physicsprize2016.pdf
- Szpiro, G. G. (2008). *Poincare's Prize: The Hundred-Year Quest to Solve One of Math's Greatest Puzzles*. New York: Penguin.
- Papert, S. (1972). Teaching Children to be Mathematicians Versus Teaching About Mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 3(3), 249-262.
- Wang, Z. X., & Guo, D. R. (1989). *Special Functions*. Singapore: World Scientific.