

Numerik – Angewandte Mathematik mit Schulrelevanz?

Numerik ist ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik mit großer Bedeutung für viele Anwendungen und Forschungsprojekte. Numerische Simulationen in der Produktion, die Weiterverarbeitung mathematischer Modelle mit großen Datenmengen und die Steuerung moderner Regelsysteme sind nur wenige Beispiele. So wirkt es selbstverständlich, dass Numerik bzw. numerisches Rechnen zum Pflichtprogramm vieler (ingenieurwissenschaftlicher) Studiengänge gehört. Deshalb überraschen die geringe Berücksichtigung im derzeitigen Mathematikunterricht und der daraus folgende Bruch zwischen Hochschul- und Schulmathematik. Wie kann diesbezüglich in der gymnasialen Oberstufe auf mathematikreiche Studiengänge vorbereitet und ein abgerundetes Mathematikbild vermittelt werden? In diesem Beitrag werden zentrale Ideen herausgearbeitet und grob umrissen, die in Grundzügen bereits in den Sekundarstufen behandelbar sind. Abschließend soll exemplarisch auf Umsatzmöglichkeiten im Unterricht eingegangen werden.

Charakterisierung der numerischen Mathematik

Wie bei jedem Beschreibungsversuch eines mathematischen Teilgebiets, ist auch hier eine exakte und zu anderen Gebieten trennscharfe Definition aufgrund vieler Schnittstellen mit anderen Disziplinen weder möglich noch inhaltlich sinnvoll. Aus meiner Sicht hilfreich, ist die Charakterisierung durch die Beschreibung der Aufgabenstellung nach Rannacher (2006): „Aufgabenstellung der numerischen Mathematik ist die Entwicklung von Methoden, mit denen die Lösungen mathematischer Problemstellungen effektiv berechnet bzw. möglichst mit Fehlerangabe angenähert werden können.“

Allein auf Grundlage einer kurzen Charakterisierung kann jedoch weder ein Unterrichtskonzept entwickelt noch die Sprachfähigkeit über Numerik gefördert werden. Hilfreicher ist das Herausarbeiten von zentralen Ideen der Numerik, die basierend auf vereinzelt Vorarbeiten (vgl. etwa Pfahl 1990, Humenberger 1995) die spezifischen Eigenschaften und typischen Tätigkeiten herausstellen.

Zentrale Ideen der Numerik – Ein Ideenkatalog

„Durch nichts zeigt sich mathematischer Unverstand deutlicher als durch ein Übermaß an Genauigkeit im Zahlenrechnen.“ (Gauß)

Numerische Mathematik wird praktisch immer in Anwendungskontexten, seien sie real oder simuliert, genutzt, sodass Ausgangsbasis und Ergebnis konkrete Zahlenwerte sind. Die Idee der *Genauigkeit* umfasst nicht nur alle

Überlegungen zur sinnvollen Genauigkeit jener Werte, sondern auch umfangreiche Fehleranalysen. Da die Gewinnung exakter (im Sinne 100%ig genauer) Daten aus realen Messwerten in der Praxis oft unmöglich ist, ist die Angabe von Werten mit Fehlerschranken zweckdienlich. Neben solchen Eingabefehlern müssen im Rahmen einer Fehleranalyse jedoch auch Modellierungsfehler, Rechengenauigkeit und Ungenauigkeiten des Lösungsverfahrens berücksichtigt und deren Auswirkungen auf das Ergebnis im Blick behalten werden. Auf Universitätsniveau kommen dabei zur Bewertung, Auswahl und Optimierung von Problemstellungen und Berechnungsverfahren Konditions- bzw. Stabilitätsanalysen zum Einsatz.

Typisch für praktische Anwendungen ist oft nicht eine analytisch-exakte, sondern die approximativ-numerische Berechnung von Werten. So ist ein großes Forschungsgebiet die Entwicklung und Verbesserung *iterativer* Lösungsverfahren, die eine sukzessive Approximation an die Lösung ermöglichen. Motiv ist nicht nur eine Reduktion des Rechenaufwands, sondern auch die Annäherungen an Lösungen, die auf analytischem Wege nicht zu gewinnen sind. Als Beispiele aus dem Schulkontext seien die Berechnung von $\int e^{-x^2} dx$, π und $\sqrt{2}$ genannt. Interessante Aspekte sind die Konvergenz, die für die gewünschte Genauigkeit erforderliche Schrittzahl sowie die allgemeinen Vor- und Nachteile von schrittweiser Annäherung an eine Lösung.

Eine wesentliche Eigenschaft numerischer Verfahren ist deren Ausführung am Computer, sodass *Effizienz*betrachtungen der Verfahren eine wesentliche Bedeutung zu kommt. Die Ressourcenanforderung setzt sich aus Speicherbedarf und benötigter Rechenzeit zusammen und hängt von der konkreten Eingabe ab. So sind pauschale Aussagen wie „Verfahren A ist schneller als Verfahren B“ im Allgemeinen nicht möglich, da der Berechnungsaufwand gerade bei spezialisierten Verfahren, je nach Eingabewerten, stark variiert. Ebenso reicht es in der Praxis in vielen Fällen nicht, dass ein Verfahren für eine bestimmte Problemstellung existiert, sondern es werden immer bessere, ressourcenschonendere Verfahren gesucht bzw. benötigt.

Einen beachtlichen Stellenwert nehmen Problemstellungen ein, denen eine *Optimierung* zugrunde liegt. Ausgehend von Restriktionen wird die beste (oder eine hinreichend gute) Lösung aus einer Menge möglicher Lösungen gesucht, bei der eine Zielfunktion minimiert oder maximiert wird. Exemplarisch sei die in vielen Gebieten unverzichtbare Finite-Element-Methode genannt, die die Problemstellung der Minimierung des Residuums (Fehlerterm) umfasst. Nützliche Fragestellungen für den Mathematikunterricht sind: Was heißt optimal? Wie können unterschiedliche Parameter innerhalb einer Zielfunktion gewichtet werden? Wie sind Optimierungsgrad des Ergebnisses und Effektivität des Verfahrens gegeneinander abzuwägen?

Ausgewählte Umsetzungsvorschläge

Allgemein können numerische Ideen gut im Rahmen von Anwendungsaufgaben in den Unterricht integriert werden. Bezogen auf den häufig im Mathematikunterricht zugrunde gelegten Modellierungskreislauf ist die numerische Lösung von Problemstellungen in der „Welt der Mathematik“ zu verorten und kann so innerhalb von echten Anwendungskontexten thematisiert werden. Zur numerischen Lösung mathematischer Problemstellungen können dabei die Schnittstellen mit der reinen Mathematik und der Informatik genutzt werden.

Zu zwei der vier Ideen möchte ich Anregungen für eine unterrichtliche Umsetzung geben. Dabei sind die Genauigkeit und Effizienz zunächst interessanter, da zu den Themen Iteration und Optimalität/Optimierung bereits viele Materialien existieren. Zur der Idee der Genauigkeit wurden konkrete Erkenntnisse durch einen Schüler-Workshop gewonnen, während zur Idee der Effizienz an dieser Stelle nur einzelne Gedanken vorgestellt werden.

Praktische Erfahrungen zur Umsetzung der Idee Genauigkeit wurden durch die Entwicklung eines Tagesworkshops „Mit Fehlern rechnen“ für die Sekundarstufe II gesammelt. In diesem Workshop sollen Schüler für das Grundproblem der Fehlerhaftigkeit sensibilisiert werden. Nach einer Thematisierung von Genauigkeit im Mess- und Produktionswesen in unterschiedlichen Anwendungskontexten sowie der Einführung der Begriffe relativer, absoluter Fehler und Fehlerschranke wird die Verwendung dieser geübt. Darauf aufbauend werden die Ergebnisse von Berechnungsverfahren bei fehlerbehafteten Eingaben mittels Doppelrechnung untersucht. In einer vertiefenden Phase wird für grundlegende Rechenverfahren die Konditionszahl zur Fehlerabschätzung verwendet und die Fehlerverstärkung unterschiedlicher Problemstellungen miteinander verglichen. Nach Betrachtung der Fehlerquelle „Eingabefehler“ werden in der letzten Phase Verfahrensfehler am Beispiel verschiedener numerischer Integrationsverfahren untersucht sowie mögliche praktische Anwendungen erarbeitet.

Effizienzbetrachtungen sind bereits in der Primar- und Unterstufe z. B. im Rahmen der Multiplikation möglich. Zwar führt das verbreitete Verfahren der schriftlichen Multiplikation immer zur Lösung, jedoch stellt die Anwendung dieses Verfahrens nicht immer die schnellste Berechnungsmöglichkeit dar. Für die Multiplikation zweier Zahlen, die nahe an einer Zehnerpotenz liegen, ist bspw. die Vedische Multiplikation wesentlich schneller. So kann die Multiplikation von $88 \cdot 98 = 8624$ auf die simple Berechnung von $98 - (100 - 88) = 98 - 12 = 86$ und $(100 - 88) \cdot (100 - 98) = 12 \cdot 2 = 24$ zurückgeführt werden. So lassen sich einfache Verfahrensanalysen zum Berechnungsaufwand in Abhängigkeit der Eingabe bereits an diesem Beispiel

realisieren. Da die Vedische Multiplikation immer zur Lösung führt, ist ein zusätzlicher Vergleich mit Verfahren, die nur in ausgewählten Fällen einsetzbar sind, empfehlenswert. Ich plädiere für die explizite Behandlung von Rechenricks und die Thematisierung spezifischer Vor- und Nachteile, die von konkreten Einsatzszenarien abhängig sind. Schließlich ist eine häufige Praxisfrage neben „Kann das gelöst werden?“ auch: „Wie kann das schneller gelöst werden?“

Zudem plädiere ich dafür, darauf aufmerksam zu machen, wenn Schüler – ohne viel darüber nachzudenken – sich von selbst für die jeweils effektivere von zwei Methoden entscheiden. So werden Oberstufen-Schüler den Scheitelpunkt einer quadratischen Funktion in der Regel durch Nullsetzen der Ableitung, statt durch quadratische Ergänzung, bestimmen.

Fazit

Die Unterrichtserprobungen zum Thema Genauigkeit zeigen, dass das in der Forschung und Entwicklung wichtige mathematische Teilgebiet Numerik über charakteristische Ideen verfügt, die auf den entsprechenden Niveaus in den Schulunterricht integrierbar sind. Der Autor ist davon überzeugt, dass das Mathematikbild der Schülerinnen und Schüler durch eine Integration der genannten Aspekte in den Mathematikunterricht gewinnbringend erweitert werden kann. Aus diesem Grund sollen im dahinterstehenden Dissertationsprojekt weitere Umsetzungsmöglichkeiten entwickelt und erprobt werden, um so einen kleinen Beitrag zu einer stärkeren Berücksichtigung im Mathematikunterricht zu leisten.

Literatur

- Blankenagel, J. (1985). *Numerische Mathematik im Rahmen der Schulmathematik. Ansätze zu einer Didaktik*. Mannheim: BI Wiss.-Verl.
- Humenberger, J. & Reichel, H.-C. (1995). *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht*. Mannheim: BI-Wiss.-Verl.
- Pfahl, M. (1990). *Numerische Mathematik in der gymnasialen Oberstufe*. Mannheim: BI-Wiss.-Verl.
- Rannacher, R. (2006). *Einführung in die Numerische Mathematik. Numerik 0*, Institut für Angewandte Mathematik an der Universität Heidelberg.
- Schuppar, B. & Humenberger, H. (2015). *Elementare Numerik für die Sekundarstufe (Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II)*. Berlin: Springer Spektrum.