

Stefan UFER, Sarah OTTINGER, München, Markus VOGEL, Heidelberg, Hui-Yu HSU, Ying-Hao CHENG & Jian-Cheng CHEN, Taipeh

## **Geometrisches Problemlösen in Taiwan und Deutschland – Ergebnisse einer experimentellen Vergleichsstudie**

Spätestens seit den internationalen Vergleichsstudien Anfang der 2000er Jahr sind große Leistungsunterschiede zwischen Lernenden aus ostasiatischen Ländern und westlichen Ländern gut dokumentiert (z. B. OECD, 2014). Diese Leistungsunterschiede sind vor einer Bandbreite spezifischer Faktoren in den jeweiligen kulturellen Kontexten zu interpretieren, wie z.B. kollektivistisch vs. individualistisch orientierten Rahmenkulturen, mit denen unterschiedliche Zielorientierungen einhergehen, unterschiedlichen Lern-Lehr-Kulturen, pädagogischen Traditionen sowie curricularen Rahmenbedingungen in Schule und Lehrerausbildung (siehe auch Heinze & Yang, 2017). Im binationalen TaiGer-Netzwerk zur Untersuchung sozio-kultureller Unterschiede werden binationale Studien mit Lernenden und Lehrkräften aus Taiwan und Deutschland als Repräsentanten der beiden Kulturen vor einem gemeinsamen theoretischen Rahmen durchgeführt. Das Ziel der Projekte ist dabei weniger die Identifikation und Prüfung von absoluten Unterschieden in Leistungen und Einstellungen, sondern die Untersuchung, inwiefern theoretische Annahmen und empirische Befunde in beiden Kulturen parallel auftreten bzw. ob sie von den jeweiligen Rahmenbedingungen beeinflusst werden. Die vorliegende Studie fokussiert geometrisches Problemlösen, insbesondere Prozesse des Beweisen und Berechnen in beiden Ländern.

### **Forschungsstand**

Verständnis für das Konzept des mathematischen Beweises als wesentliches Instrument mathematischer Erkenntnissicherung und -kommunikation ist als Ziel von Mathematikunterricht in Curricula und Standards weltweit benannt (z. B. KMK, 2003; MoED, 2003). Gut dokumentiert sind jedoch auch Schwierigkeiten von Lernenden beim Erstellen eigener Beweise und beim Prüfen fremder Beweisversuche (z.B. Healy & Hoyles, 2000). Beweise werden dabei in der Regel als eine spezifische Form mathematischer Argumentationen verstanden, die auf im jeweiligen Kontext akzeptierte Argumente zurückgreifen, diese mit jeweils anerkannten Schlussweisen verknüpfen und gemäß einer jeweils als adäquat anerkannten Form abgefasst sind (Styliani-des, 2007). Häufig betont wird dabei eine inhärente Komplexität von Beweisaufgaben, vor allem auch im Vergleich zu vergleichbaren Berechnungsaufgaben (z. B. Duval, 2002).

Für binationale Vergleichsstudien eignet sich das Beweiskonzept vor allem deshalb, weil es international als fachlich kohärent angesehen wird (Heintz,

2000). Dennoch unterschieden sich die beiden im Projekt untersuchten kulturellen Kontexte substantiell in Bezug auf Lerngelegenheiten zum Beweis-konzept: Leung (2005) weist auf häufigere Lerngelegenheiten zum Beweisen in ostasiatischen Ländern hin und Chang et al. (2011) analysieren die unterschiedliche didaktische Funktion von Beweisen in deutschen und taiwanesischen Schulbüchern. Dabei zeigt sich, dass Beweise im deutschen Mathematikunterricht vorwiegend der Wissenssicherung dienen, während sie in Taiwan primär Anlässe für eigenständiges Problemlösen darstellen.

Zur Untersuchung der spezifischen Komplexität von Beweisanforderungen eignen sich vor allem parallelisierte Aufgaben, die in einem kontrollierten Problemraum Beweis- und Berechnungsanforderungen umsetzen, die jeweils dieselben inhaltlichen Problemlöseschritte erfordern. Hsu (2010) hat solche Paare parallelisierter Aufgaben zur elementaren ebenen Geometrie (Winkel- und Längenberechnungen, Kongruenzgeometrie) entwickelt. Offen ist in diesem Zusammenhang insbesondere die Frage, inwiefern sich eine spezifische Komplexität von Beweisanforderungen in beiden kulturellen Kontexten durch unterschiedliche Lösungsraten zeigt, was beispielsweise durch den komplexeren epistemischen Status der beim Beweisen zu betrachtenden generellen Aussagen zu erklären wäre, bzw. ob die beiden Anforderungen zu ähnlichen Lösungsraten führen. Letzteres wäre zu erklären, wenn die Komplexität der Aufgaben primär durch die geometrische Struktur und das zur Lösung notwendige geometrische Wissen, nicht jedoch durch die Allgemeinheit der zu entwickelnden Argumentation determiniert wäre.

### **Ziele und Fragestellungen**

Neben eher deskriptiven Fragestellungen geht das Projekt unter anderem den folgenden Fragen nach: (1) Zeigen sich in beiden Ländern jeweils unterschiedliche Leistungen zwischen parallelisierten geometrischen Beweis- und Berechnungsaufgaben, (2) welchen Einfluss hat die Reihenfolge der Bearbeitung der beiden Problemtypen auf die Leistungen?

### **Methodisches Vorgehen**

Lernende der Jgst. 8 und 9 aus Deutschland (N=220) und Taiwan (N=299) bearbeiteten an zwei Testtagen Instrumente zum geometrischen Basiswissen sowie jeweils vier Beweis- und Berechnungsaufgaben. Dabei wurde die Reihenfolge der Beweis- und Berechnungsaufgaben experimentell variiert. Alle Bearbeitungen wurden auf einer fünfstufigen Skala kodiert (Cheng & Lin, 2007). Die Daten der Einzelitems wurden bei ausreichenden bis guten Reliabilitäten zu Skalen für Basiswissen, Berechnungsaufgaben und Beweisaufgaben zusammengefasst. Die Skalendaten wurden mit Hilfe linearer Mischmodelle analysiert, wobei Vorwissensmaße kontrolliert wurden.

## **Ergebnisse**

Die Ergebnisse zeigen, auch unter Kontrolle des Vorwissens, deutlich bessere Leistungen der Lernenden aus Taiwan beim Beweisen und Berechnen. Signifikante Unterschiede zwischen der Leistung in Beweis- und Berechnungsaufgaben, vor allem niedrigere Leistungen in Beweisaufgabe, zeigten sich nur in Deutschland. Auch bezüglich der Reihenfolge ergaben sich Unterschiede zwischen den Ländern: In Taiwan wurden Beweisaufgaben in der Bedingung die Beweisaufgaben zuerst vorgelegt bekamen, schlechter gelöst als Berechnungsaufgaben in der Bedingung, in der diese zuerst vorgelegt wurden. In Deutschland war dieser Unterschied größer, und trat auch für die zweiten vorgelegten Aufgaben der Aufgabenpaare im gleich großen Umfang auf. Weiterhin waren die Leistungen bei der zweiten Aufgabe besser als bei der zuerst vorgelegten Aufgabe des jeweiligen Aufgabepaares.

## **Diskussion**

Insgesamt ist anzumerken, dass die interindividuellen Unterschiede in beiden Ländern auf sehr unterschiedlichen Niveaus rangieren. Während taiwanesischen Lernende sich eher darin unterscheiden, ob sie nur Teile der nötigen Problemlöseschritte oder die vollständigen Lösungen fanden, fanden deutsche Lernende häufig keine oder nur Teile der Lösung. In beiden Teilstichproben finden sich Hinweise auf eine intrinsische Komplexität von Beweisproblemen (Duval, 2002; Ufer et al., 2009). Diese scheint taiwanesischen Lernenden jedoch insgesamt weniger Probleme zu bereiten. Wenn sie die Problemstruktur schon von einer vorherigen Berechnungsaufgabe her kennen, scheinen sie dieses Problem überwinden zu können. Bei deutschen Lernenden ist dieser Unterschied deutlich größer, und bleibt auch bestehen, wenn die Problemstruktur bereits vertraut ist. Diese Analysen kontrollieren sowohl geometrisches Basiswissen als auch Fähigkeiten zum geometrischen Problemlösen bei parallelisierten Berechnungsaufgaben. Es ist also plausibel, dass diese Schwierigkeiten bei Beweisen auf spezifische Unterschiede in den Lerngelegenheiten zu Beweisen (Leung, 2005) bzw. der didaktischen Rolle von Beweisen (Chang, 2013) in beiden Unterrichtskulturen zurückzuführen sind. Eine wiederholte Bearbeitung derselben Problemstruktur mit anderer Anforderung (Beweisen vs. Berechnen) zeigt insbesondere bei deutschen Lernenden einen Effekt. Die Ursachen hierfür können die vorliegenden Analysen noch nicht aufklären, jedoch sollen im weiteren Projektverlauf insbesondere motivationale Faktoren mit in Betracht gezogen werden.

Insgesamt zeigt das Projekt auf, wie mit der Konfundierung sehr vieler Unterschiedsdimensionen (Heinze & Yang, 2017) bei kulturvergleichenden Studien umgegangen werden kann, indem spezifische Problembereiche, hier

Beweisanforderungen, durch gezielte Kontrolle von Basiswissen und geometrischer Problemlösekompetenz bei Berechnungsaufgaben isoliert werden. Dies ermöglicht einerseits die Identifikation von gemeinsamen Mustern (z.B. die spezifische Komplexität von Beweisaufgaben), andererseits eine lokale Interpretation abweichender Befunde im nationalen Kontext.

## Literatur

- Chang, Y.-P., Ufer, S., Reiss, K., & Lin, F. L. (2011). An overview on German and Taiwanese textbooks building mathematical proof in secondary school: A geometry content analysis. In National Academy for Educational Research (Ed.), *Proceedings of International Conference on Textbook Development* (pp. 161-181). Taipei: National Academy for Educational Research.
- Cheng, Y. H. & Lin, F. L. (2007). The effectiveness and limitation of Reading and coloring strategy in learning geometry proof. In J.-H. Woo, H.-C. Lew, K.-S. Park, D.-Y. Seo (Eds.): *Proceedings of the 31th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, pp. 113-120)*. Seoul: PME.
- Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: what ways for students? Plenary papers in the 2002 *International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* 16.-19.11.2002. Taipei: Dept. of Mathematics, NTNU
- Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A Study of Proof Conceptions in Algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 396-428.
- Heintz, B. (2000). *Die Innenwelt der Mathematik: Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin* (1st ed.). Wien: Springer.
- Heinze, A. & Yang, K.-L. (2017). How to Research Cultural-Societal Factors Influencing Mathematics Education? In Kaur, B., Ho, W.K., Toh, T.L., & Choy, B.H. (Eds.). *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 139-140. Singapore: PME.
- Hsu, H.-Y. (2010). The study of Taiwanese students' experiences with geometric calculation with numbers (GCN) and their performance on GCN and geometry proof (GP). Dissertation submitted at the University of Michigan.
- Kultusministerkonferenz. (KMK, 2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss*. Bonn: KMK.
- Leung, F. (2005). Some Characteristics of East Asian Mathematics Classrooms Based on Data From the TIMSS 1999 Video Study. *Educ. Studies in Mathematics*, 60, 199-215.
- Ministry of Education Taiwan (MoEd, 2003). *The learning domain of mathematics of grade 1-9 curriculum guidelines*. Taipei, Taiwan: Ministry of Education.
- OECD (2014). *PISA 2012 Results in Focus. What 15-year-olds know and what they can do with what they know*. Organization for Economic Cooperation and Development. <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 289-321.