Peter ULLRICH, Koblenz

Ein Quantenmechaniker in der höheren Algebra: Wolfgang Pauli, Emil Artin und die Darstellungstheorie halbeinfacher Systeme

Seit Ende des 19. Jahrhunderts wird Freiheit der Mathematik auch als Lösung von der Anwendbarkeit verstanden. Antithetisch wies Johann Radon jedoch darauf hin, dass oft „mathematische Theorien in abstrakter Form bereits vorliegen, vielleicht als unfruchtbare Spielerei betrachtet, die sich plötzlich als wertvolles Werkzeug für physikalische Erkenntnis entpuppen“ [Radon 1954, 6], wohlgemerkt: vor der Anwendung der nach ihm benannten Transformation in der Computertomographie. In zugespitzter Form trat diese Dialektik im Wintersemester 1927/28 auf, als anlässlich einer Vorlesung über „Höhere Algebra“ zwei Vertreter von damals als unanwendbar erscheinenden Disziplinen zusammentrafen, Emil Artin für die „Moderne Algebra“ und Wolfgang Pauli für die Quantenphysik. Die Behandlung der „Darstellungstheorie halbeinfacher Systeme“ durch Artin war für Pauli aber so nützlich, dass er eine Mitschrift anfertigte, die im Pauli-Nachlass beim CERN erhalten ist und von Karl von Meyenn erschlossen und transkribiert wurde.

1. Zur Darstellungstheorie und ihrer Geschichte

Unter einer **Darstellung einer Gruppe** G versteht man einen Gruppenhomomorphismus von G in die Gruppe der invertierbaren linearen Selbstabbildungen eines Vektorraums V über einem Körper K. Diese abstrakte Definition verallgemeinert Interpretationen wie die der Gruppe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ der Reste modulo n als Gruppe der n-ten Einheitswurzeln im Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen (1-dimensionale komplexe Darstellung).

Dies lässt sich verallgemeinern zu Darstellungen von **Systemen hyperkomplexer Zahlen** (modern: Algebren), welche aus der Absicht entstanden waren, die komplexen Zahl zu verallgemeinern. Insbesondere kann man hyperkomplexe Zahlen miteinander addieren, multiplizieren und mit Elementen des Grundkörpers K multiplizieren, wobei übliche Rechenregeln gelten. Eine **Darstellung eines Systems** A **hyperkomplexer Zahlen** ist eine mit den drei genannten algebraischen Operationen verträgliche Abbildung von A in der Menge aller linearen Selbstabbildungen eines geeigneten K-Vektorraums V, wobei unter der Multiplikation von Selbstabbildungen von V deren Komposition zu verstehen ist. Ein System hyperkomplexer Zahlen nennt man **halbeinfach**, wenn zu jedem $b \in A$ mit $b \neq 0$ ein $c \in A$ existiert, so dass $(bc)^n \neq 0$ ist für alle natürlichen Zahlen n.

Historisch traten1-dimensionale komplexe Darstellungen, die sogenannten **Charaktere** χ, für den Spezialfall der Gruppe der multiplikativ invertierbaren Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bereits implizit 1837 beim Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes auf, wo sie zur Definition von L-Reihen herangezogen wurden: $L(s, \chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ Primzahl}} \frac{1}{1 - \chi(p)p^{-s}}$, auch wenn die explizite Definition eines Charakters erst auf Dedekind zurückgeht.

Der Allgemeinfall eines Vektorraums V beliebiger endlicher Dimension und nicht notwendig über dem Körper $\mathbb{C}$ wurde behandelt von Georg Frobenius, William Burnside und Issai Schur. Die für die Quantenphysik erforderliche Verallgemeinerung auf kontinuierliche Gruppen wurde vorangetrieben durch Emmy Noether, Schur und Hermann Weyl, der die Darstellungstheorie für kompakte zusammenhängende Lie-Gruppen entwickelte.

2. Emil Artin und Wolfgang Pauli

Emil Artin wurde am 3.3.1898 in Wien geboren. Nach Studienbeginn in Wien, Militärdienst und Studienfortsetzung in Leipzig wurde er dort am 20.6.1921 promoviert. Zum Beginn des Wintersemesters 1921/22 wechselte er nach Göttingen. Wolfgang Pauli wurde am 25.4.1900 in Wien geboren und studierte an der Universität München, wo er im Juli 1921 promoviert wurde. Zum 1.10.1921 wurde er Assistent bei Max Born in Göttingen. Über sein erstes Zusammentreffen mit Pauli berichtete Artin am 13.11.1921 in einem Brief an seinen Doktorvater Gustav Herglotz:

„*Klein hält ein Seminar in seiner Wohnung über Differentialgleichungen der math[ematischen] Physik[. ...] Am Seminar nehmen teil Prof Courant, seine Assistenten, [... .] Ferner noch Herr Pauli aus München, ein Landsmann von mir, den Sie sicher kennen. Auch ich wurde dazu eingeladen.*“

Artin und Pauli verließen Göttingen bereits im Frühjahr 1922, um in Hamburg Assistentenstellen anzutreten. In Hamburg habilitierte sich Artin am 24.7.1923 und wurde zum 1.4.1925 zum außerordentlichen und zum 15.10.1926 zum ordentlichen Professor ernannt. Pauli hingegen verbrachte ab Oktober 1922 einen einjährigen Studienaufenthalt bei Niels Bohr in Kopenhagen. Nach seiner Rückkehr nach Hamburg habilitierte er sich im Januar 1924 und wurde 1926 zum außerordentlichen Professor ernannt.

Das Interesse für die Darstellungstheorie, das Artin und Pauli im Wintersemester 1927/28 in Artins Vorlesung zusammenführte, speiste sich aus deutlich unterschiedlichen Quellen:

In seiner Habilitationsschrift [Artin 1923] verwendete Artin Darstellungen der Galois-Gruppe, um „eine neue Art von L-Reihen“ zu definieren (welche die oben genannten L-Reihen bei Dirichlet verallgemeinern): Gegeben sei eine Galois-Erweiterung M des Grundkörpers K mit Galois-Gruppe G. Artin ordnete jedem unverzweigten Primideal p aus K mit Primteiler P in M einen Galois-Automorphismus $\sigma \in G$ zu mit $\sigma(a) \equiv a^{Np}$ mod P für $a \in M$, diesem wiederum mittels einer Darstellung ρ von G eine Matrix A_p und definierte $L(s, \chi) := \prod_{p \text{ unverzweigt}} \frac{1}{\det(E - Np^{-s} A_p)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\chi)}{n^s}$ mit χ dem zu ρ gehörenden Charakter. Er konnte bereits einige Eigenschaften dieser Reihen zeigen. Weitere von ihm aufgestellte Vermutungen wurden erst später bewiesen, es war aber schon damals klar, dass für deren Beweis die Darstellungstheorie eine entscheidende Rolle spielen würde. Zudem interessierte sich Artin gerade im Jahr 1927 für Systeme hyperkomplexer Zahlen.

Artins Vorlesung war im Wintersemester 1927/28 hochaktuell: Bartel Leendert van der Waerdens Buch „Moderne Algebra II" [van der Waerden 1931] mit einem Kapitel über Darstellungstheorie erschien erst 1931, sein Buch über „Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik" [van der Waerden 1932] sogar erst 1932. Im gleichen Semester wie Artin las in Göttingen Emmy Noether über „Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie". Pauli erinnerte sich später wie folgt an diese Zeit:

„*Im Wintersemester 1927/28 hörte ich dort [= in Hamburg] eine mich im Zusammenhang mit der neuen Quantenmechanik sehr interessierende Vorlesung von Artin über hyperkomplexe Zahlsysteme. Dabei begann eine Episode […] in der Beziehung von Mathematik und Physik, die sich später noch fortsetzen sollte.*" [Pauli 2001, 413]

3. Die Vorlesung „Höhere Algebra" und ihre Mitschrift

Von 1923 bis 1937 hielt Artin nur wenige Vorlesungen mit schon am Titel erkennbarem Bezug zur Physik, hingegen durchschnittlich in jedem Semester mindestens eine aus dem Bereich Algebra und Zahlentheorie. So war auch die Vorlesung im Wintersemester 1927/28, die Pauli hörte und mitschrieb, angekündigt unter dem Titel „Ausgewählte Kapitel der höheren Algebra". Laut Paulis Mitschrift war sie wie folgt strukturiert:

Darstellungstheorie halbeinfacher Systeme. *§ 1. Rekapitulation über halbeinfache Systeme, § 2. Die Darstellungen, § 3. Orthogonalitätsrelationen für irreduzible Darstellungen und primitive Charaktere*

Darstellungstheorie endlicher Gruppen. *§ 1. Orthogonalitätsrelationen für irreduzible Darstellungen, § 2. Charaktere und ihre Orthogonalitäts-Relationen, § 3. Gruppenzahlen. Charakteristische Einheiten, § 4. Die Vollständigkeitseigenschaft der irreduziblen Darstellungen. Entwicklung beliebiger Gruppenzahlen nach den irreduziblen Darstellungen, beliebiger Klassenfunktionen nach deren Charakteren. § 5. Erzeugung der irreduzib-*

len Darstellungen der symmetrischen Gruppe. § 6. Anwendung auf den Termzerfall bei gleichen Teilchen in der Wellenmechanik, § 7. Die Darstellungen der Gruppe der linearen Substitutionen von N Veränderlichen mit der Determinante 1. § 8. Zusammenhang der Darstellungen der linearen und der symmetrischen Gruppe. § 9. Modifikation des Termzerfalls durch den Spin.

Allein der Vergleich dieses Inhaltsverzeichnisses mit dem einer weiteren Vorlesung über Darstellungstheorie aus dem Sommersemester 1932 macht deutlich, dass Artin auf die Interessenslage des anwesenden Quantenmechanikers Pauli erhebliche Rücksicht nahm: So fehlen 1932 in den Überschriften alle eindeutig der Physik zuzuordnenden Begriffe. Allerdings war Artin nicht bereit, für die Anwendbarkeit jeden Preis zu zahlen:

„*Am Beginn der Vorlesung erklärte Artin, die kontinuierlichen Gruppen könne er nicht in der Vorlesung bringen, weil für das Theorem der vollen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher kontinuierlicher Gruppen kein algebraischer Beweis vorliege. Der einzige bekannte Beweis von Weyl verwende leider Integrale über die Gruppenmannigfaltigkeit.*“ [Pauli 2001, 413]

Trotz dieser die Nutzbarkeit für die Quantenphysik erheblich beeinträchtigenden Einschränkung machte Pauli von seiner Mitschrift noch lange Gebrauch. So schrieb er am 15.4.1939 an Nicholas Kemmer über halbeinfache hyperkomplexe Systeme und deren Darstellungstheorie:

„*Man erhält […] ein praktisches Kriterium für Halbeinfachheit, wenn man die „reguläre Darstellung“ […] des Systems heranzieht. (Das steht nicht bei van der Waerden, aber ich entnehme das aus einem alten Kollegheft einer Vorlesung von Artin, die ich im Wintersemester 27/28 bei ihm gehört habe.*“ [Pauli 1985, 624–625]

Literatur

Artin, E. (1923). Über eine neue Art von *L*-Reihen. *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität, 3*, 89–108.

Pauli, W. (1985). *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein u.a., Band II: 1930–1939*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Pauli, W. (2001). *Wissenschaftlicher Briefwechsel mit Bohr, Einstein u.a., Band IV, Teil III: 1955–1956*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Radon, J. (1954). *Mathematik und Naturerkenntnis*. Rektoratsrede. Wien: Adolf Holzhausens Nfg.

Van der Waerden, B.L. (1931). *Moderne Algebra II*. Berlin: Springer.

Van der Waerden, B.L. (1932). *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*. Berlin: Springer.