Peter ULLRICH, Koblenz

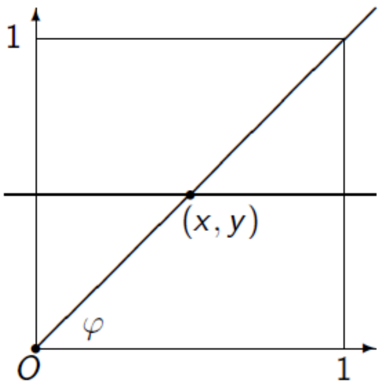
Nicht nur Kreise, Geraden und Kegelschnitte: „Mechanische Kurven“ zwischen Antike und früher Neuzeit

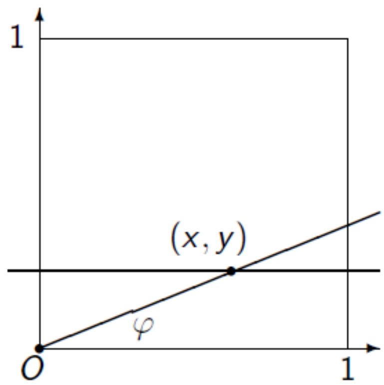
Nach Kreisen, Strecken und Geraden lernt man in der Schule als ebene Kurven Parabeln und die Hyperbel $y = 1/x$ kennen sowie vielleicht auch Ellipsen. Historisch gesehen war die Situation jedoch vielschichtiger: Der Überlieferung nach wurden Kegelschnitte zum ersten Mal von Menaichmos (circa 380–320 v. Chr.) betrachtet. Laut Proklos untersuchte Hippias von Elis jedoch schon um 420 v. Chr. eine Trisektrix und verwendete sie zur Winkeldreiteilung. Deinostratos (circa 390–320 v. Chr.), der ihre Nutzung für die Kreisquadratur entdeckte, soll ein Bruder des Menaichmos gewesen sein, des eben genannten Ersterforschers der Kegelschnitte.

Die Bezeichnung „mechanische Kurven“ für die Trisektrix und weitere, schon in der Antike behandelte Kurven wie etwa die Archimedische Spirale geht auf René Descartes (1596–1650) zurück, der damit auf deren Erzeugung mittels mechanischer Geräte anspielte, aber für diese und die Kegelschnitte den Oberbegriff der „kinematischen Kurven“ vorschlug. Generell bestand großes Interesse an derartigen Kurven im 16. und 17. Jahrhundert, auch schon vor der „Koordinatisierung“ der Geometrie durch Pierre de Fermat und, vor allen Dingen, Descartes um 1637. Die „mechanischen Kurven“ waren und sind dabei nicht nur irgendwelche weiteren Beispiele, sondern lieferten (historisch gesehen) bzw. können liefern (didaktisch gesehen) einen Nährboden für die Infinitesimalrechnung.

1. Die Trisektrix / Quadratrix und das Vietasche Wurzelprodukt

Im Einheitsquadrat mit dem linken unteren Eckpunkt als Koordinatenursprung O bewege sich eine horizontale Gerade gleichförmig von oben nach unten. Zeitlich synchron drehe sich eine Halbgerade um O von der vertikalen in die horizontale Richtung. (Eine dynamische Umsetzung findet man etwa unter https://www.geogebra.org/m/JRZPwTPc.)





Dadurch, dass die Drehbewegung der Halbgeraden proportional gekoppelt wird mit der linearen Bewegung der horizontalen Geraden, lässt sich die n-Teilung des Winkels φ zurückführen auf die n-Teilung einer Strecke der Länge y; insbesondere wird die Drittelung jedes Winkels möglich, was zu dem Namen **Trisektrix** führte für die Kurve, die der Schnittpunkt von Halbgerade und horizontaler Gerade durchläuft.

Laut Pappus hat Deinostratos um 350 v. Chr. zusätzlich entdeckt, dass für φ gegen 0 die Kurve sich der x-Achse bei dem Wert $2/\pi$ nähert. Ist dieser Wert gegeben, so lässt sich daraus mit Zirkel und Lineal die Quadratur des Kreises durchführen, weshalb sich ab dann der Name **Quadratrix** für die Kurve einbürgerte. Einen elementargeometrischen Beweis für den Satz des Deinostratos findet man in [Hischer 2000, 113–114]. Stehen die Kenntnisse einer „Analysis I"-Vorlesung zur Verfügung, so kann man diese Aussage auch mittels des Satzes von l'Hospital oder der Definition (des Kehrwerts) der Ableitung des Tangens in 0 zeigen. Es gibt aber auch einen Weg, der den Anfängen der Infinitesimalrechnung nahekommt:

Nach Konstruktion der Quadratrix hängen im Fall $y > 0$ bzw. $\varphi > 0$ die Koordinate y und der Winkel φ so zusammen, dass es ein $t > 0$ gibt mit $\varphi = t \cdot \pi/2$ und $y = t \cdot 1$. Somit ist $y/\varphi = 2/\pi$. Weiterhin ist definitionsgemäß $y/x = \tan\varphi$. Man nutze jetzt die beim expliziten Ableiten der Sinus-Funktion verwendete Abschätzung $\sin\varphi \le \varphi \le \tan\varphi$ für $0 \le \varphi < \pi/2$. (Das erste Ungleichheitszeichen gilt als Längenabschätzung zwischen dem Lot von dem Punkt $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ auf die x-Achse und irgendeiner Verbindung des Punktes mit dieser Gerade und das zweite als Flächeninhaltsabschätzung, da der Kreisausschnitt mit Radius 1 zum Winkel φ Teil des Dreiecks mit den Eckpunkten (0,0), (1,0) und $(1, \tan\varphi)$ ist.) Damit ergibt sich

$$\frac{2}{\pi} = \frac{y}{\varphi} \ge \frac{y}{\tan\varphi} = x = \frac{y}{\tan\varphi} = \frac{y}{\sin\varphi} \cdot \cos\varphi \ge \frac{y}{\varphi} \cos\varphi = \frac{2}{\pi} \cdot \cos\varphi.$$

Da $\cos\varphi$ für φ gegen 0 gegen 1 strebt, ist damit der Satz des Deinostratos gezeigt.

Bezeichnet r den Abstand des Kurvenpunktes (x, y) vom Ursprung O, also $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, so folgt wegen $x = r\cos\varphi$ aus der obigen Abschätzung

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \ge r \ge \frac{2}{\pi},$$

so dass für φ gegen 0 auch r gegen $2/\pi$ strebt.

Hieraus ergibt sich eine bemerkenswerte Querbeziehung zum Wurzelprodukt von Francois Viète / Vieta (1540–1603), vgl. [Thiele 1999, 37–38]: In [Vieta 1593, Caput XVIII] griff dieser die antike Idee der Ausschöpfung der Fläche eines Kreises durch eingeschriebene reguläre 2^n-Ecke auf und erhielt, modern gesehen, zunächst:

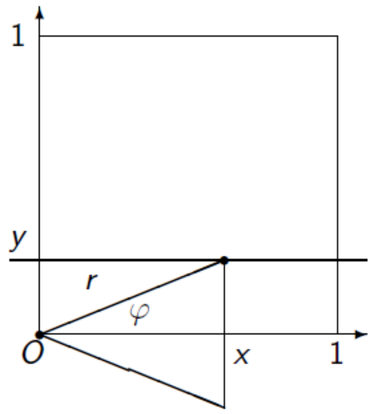
$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4} \cdot \cos\frac{\pi}{8} \cdot \cos\frac{\pi}{16} \cdot \ldots .$$

Unter Verwendung der Beziehungen $2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \cos\alpha$, also

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\alpha} \quad \text{und} \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ergibt sich daraus das Wurzelprodukt, wobei Vieta bei seiner Herleitung wohlgemerkt keinen Bezug auf die Quadratrix nahm!

Allerdings belegt [Vieta 1593, Caput VIII], dass er durchaus mit dieser Kurve vertraut war; er beweist dort nämlich den Satz des Deinostratos. Und in der Tat, selbst wenn dies nicht so bei Vieta steht:



Betrachtet man nochmals die obigen Überlegungen zur Quadratrix und wählt $y_n := 2^{-n}$, also $\varphi_n := 2^{-(n+1)} \cdot \pi$, so ist das zugehörige x_n gleich dem Inkreisradius des regulären 2^{n+1}-Ecks mit der Seitenlänge $2\,y_n = 2^{-(n-1)}$, also dem Umfang 4, während das zugehörige r_n gleich dem entsprechenden Umkreisradius ist. Das Vietasche Wurzelprodukt erweist sich somit als derjenige Spezialfall des Satzes von Deinostratos, in dem man sich mit $\varphi_n = 2^{-(n+1)} \cdot \pi$ der Endlage $\varphi = 0$ nähert.

3. Weitere „Mechanische Kurven“ aus der Antike und ihr Bezug zur Analysis

Bei der vermutlich auf Konon von Samos (circa 280–220 v. Chr.) zurückgehenden **Archimedischen Spirale** wird die Drehbewegung einer Halbgeraden proportional gekoppelt mit der Bewegung eines Punktes entlang der Halbgeraden, so dass sich diese Kurve ebenfalls zur Winkel-*n*-teilung für beliebiges *n* eignet. Darüber hinaus stellte Archimedes (287–212 v. Chr.) fest, dass unter ihrer Verwendung die Rektifikation des Kreisbogens möglich ist. Vor allen aber gab er eine geometrische Konstruktion der Tangente an die Spirale an und bestimmte den Inhalt des Flächenstücks, das von der Spirale und der Anfangslage des Halbstrahls begrenzt wird, als ein Drittel des Inhalts des Kreises, dessen Mittelpunkt der feste Endpunkt des Halbstrahls und dessen Radius die Entfernung des beweglichen Punktes nach vollendeter Drehung von diesem Punkt ist. Die Bogenlänge der Archimedischen Spirale wurde jedoch erst im 17. Jahrhundert bestimmt.

Ähnlich verhielt es sich mit der **Kissoide**, die Diokles um 200 v. Chr. einführte: Die Quadratur, also Flächenbestimmung, zu dieser Kurve wurde erst 1658 durch Christiaan Huygens (1629–1695) durchgeführt, und zwar in einem Brief an René Francois de Sluse (1622–1685), der zuvor das Volumen von deren Rotationskörper um die Asymptote bestimmt hatte. (Wegen einer ausführlichen Darstellung und weiteren Beispielen vgl. [van Maanen 1999].)

4. Nicht nur die Kegelschnitte

Die Kegelschnitte werden gerne als zentrale Beispiele für die Entwicklung der Infinitesimalrechnung herangezogen. Allerdings hatte bereits Apollonios von Perge (circa 265–190 v. Chr.) im Buch II seiner „Conica" geometrische Konstruktionen für die Tangenten an Kegelschnitte angegeben, und dieses Buch war seit der Antike durchgehend in Europa zugänglich, so dass etwa Isaac Newton (1642/3–1727) in seinen „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" die Theorie der Planetenbewegungen rein geometrisch, ohne Rückgriff auf infinitesimale Argumentationen darstellen konnte. Dasjenige Beispielmaterial, welches den Ausgangspunkt für den späteren Infinitesimalkalkül bildete, lieferten dagegen in großem Maße die zunächst gar nicht so zentral erscheinenden „mechanischen Kurven".

Literatur

Hischer, H. (2000). Klassische Probleme der Antike – Beispiele zur „Historischen Verankerung". In J. Blankenagel & W. Spiegel (Hrsg.), *Mathematikdidaktik aus Begeisterung für die Mathematik – Festschrift für Harald Scheid* (S. 97–118). Stuttgart, Düsseldorf, Leipzig: Klett.

van Maanen, J. (1999). Vorläufer der Differential- und Integralrechnung. In H. N. Jahnke (Hrsg.), *Geschichte der Analysis* (S. 43–88). Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Thiele, R. (1999). Antike. In H. N. Jahnke (Hrsg.), *Geschichte der Analysis* (S. 5–42). Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Vieta, F. (1593). Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII. In *Opera mathematica* (S. 347–435). Leyden: Elzevier 1646.