Daniel ULLRICH, David SCHÖNWÄLDER &
Myriam HAMICH, Mosbach

Summative Referenzmodelle für ausgewählte Bereiche grundlegenden Wissens und Könnens am Ende der Sekundarstufe

Mit SUmEdA (Pinkernell, Düsi, & Vogel, 2017) wurde auf der 51. GDM-Tagung ein summatives Referenzmodell für grundlegendes Wissen und Können am Ende der Sekundarstufe im Bereich der Algebra vorgelegt, welches als Instrument für die Konzeption von Diagnose- und Fördermaterial dienen soll. Die der Entwicklung dieses Modells zugrunde liegende Methodik wird derzeit im Rahmen des Schnittstellenprojekts optes+ (nähere Information unter www.optes.de) für die Entwicklung von Referenzmodellen weiterer Inhaltsbereiche verwendet. Dieser Beitrag stellt die Zwischenstände für die Bereiche Arithmetik, Funktionale Zusammenhänge und Geometrie vor.

Theoretischer Hintergrund

Bei SUmEdA handelt sich um ein summatives Referenzmodell grundlegenden Wissens und Könnens am Ende der Sekundarstufe im Bereich der Algebra. Wesentliche Aspekte des Algebrakönnens werden summierend und kumulierend aus einem fachdidaktischen Blickwinkel betrachtet. Summativ, da es sich um eine Zusammenfassung aller Aspekte am Ende der Sekundarstufen – nach Abschluss des Lernprozesses handelt. Das Modell ist inhaltsorientiert und literaturbasiert.

Das Referenzmodell wird von zwei a priori festgelegten Dimensionen aufgespannt. Eine horizontale Dimension, welche elementare kognitive Tätigkeiten bei der Auseinandersetzung mit den Elementen bzw. Denkgegenständen der vertikalen Dimension umfasst. Es wird davon ausgegangen, dass sich diese elementaren kognitiven Tätigkeiten auf weitere Inhaltsbereiche jenseits der Algebra übertragen lassen. Diese sind untergliedert in Wissen im Sinne von deklarativem Wissen nach Anderson (1996) und Können. Können fächert sich wie folgt auf: Strukturieren wird als sinnentnehmendes Lesen gesehen (Musgrave, Hatfield, & Thompson, 2015: substitutional equivalence), Transformieren im Sinne von strukturveränderndem Umformen (Musgrave, Hatfield, & Thompson, 2015: transformational equivalence) und Interpretieren als Übersetzen in eine nicht bereichsspezifische Darstellungsform und umgekehrt (Duval, 2006).

Die vertikale Dimension umfasst zum einen Variablen inklusive Parameter und zum anderen Terme und Gleichungen. Diese Elemente und Denkgegenstände können für die Referenzmodelle der Funktionen, Arithmetik und Geometrie erwartungsgemäß nicht übernommen werden. Für den jeweiligen Inhaltsbereich setzen sie sich wie folgt zusammen:

Funktionale Zusammenhänge

Variablenebene: In der Variablenebene liegt der Fokus auf den Variablen und Parameter der Funktion. Aus den reichlichen Aspekten zu Variablen werden jene herausgegriffen, die in den funktionalen Zusammenhängen zum Tragen kommen. Das ist zum einen Malles (1993) Veränderlichenaspekt, der schon bei Küchemann (1978) als „letter used as a variable“ und bei Schoenfeld & Arcavi (1988) „variable objects“ beschrieben wird. Und zum anderen, bezogen auf die Parameter einer Funktion, Malles (1993) Einzelzahlaspekt, der schon bei Küchemann (1978) in Form von „letter evaluated“ und „letter as a specific unknown“, und bei Schoenfeld & Arcavi (1988) in Form von „polyvalent names“, Einzug hält.

Objektebene: In der Objektebene betrachtet man die Funktion als „Menge aller Wertepaare bzw. die Zuordnung als neues Objekt“ (Vollrath, 1989).

Arithmetik

Größen und Zahlen: Zunächst ist zu erwähnen, dass Variablen, die sich nicht gänzlich vermeiden lassen, nur als Platzhalter im Sinne des Einsetzungsaspekts nach Malle (1993) verwendet werden. Größen sind mehr als nur (Maß)Zahlen mit Einheiten. Krauter (2005) formuliert folgende Anforderung an Größen: gleiche Größen lassen sich vergleichen, mathematische Operationen lassen sich auf Größen anwenden. Im Sinne von Arnold Kirsch wird ein „Größenbereich als angeordnete, kommutative Halbgruppe“ gesehen. (Griesel, 2015) Auf Zahlen soll hierbei nicht weiter eingegangen werden.

Terme: Unter Termen werden Ausdrücke, die aus Zahlen und Verknüpfungen / Operatoren bestehen, verstanden. In Barzel & Herget (2006) werden Terme als „Bausteine der mathematischen Fachsprache“ bezeichnet.

Geometrie

Figuren und Körper: Die Elemente der Geometrie sind bestimmt durch Figuren und Körper (Formenlehre: (Vollrath, 1999), Leitidee Raum und Form: (KMK, 2003)). Dabei spielt die Visualisierung, die Darstellung eines abstrakten Sachverhaltes mit optischen Mitteln, eine Hauptrolle im Verstehen von Geometrie (Bruder, Hefendehl-Hebeker, Schmidt-Thieme, & Weigand, 2015, S. 198; Gal & Linchevski, 2010). Des Weiteren stehen Eigenschaften und Beziehungen sowie der Umgang mit den Elementen im Mittelpunkt.

Messen: Die Grundidee des Messens hat viele Aspekte, die sich als Unterkategorien des sinnstiftenden Umgangs mit Figuren und Körpern direkt in das Referenzmodell einbinden lassen. Messen als Berechnen von Umfängen, Flächeninhalten sowie Oberflächen- und Rauminhalten (Inhaltslehre: Vollrath, 1999) nimmt mit den Formeln und funktionalen Zusammenhängen eine gesonderte Stellung ein. Dabei besteht eine sehr enge Verbindung zwischen dem "Messen" und den „Figuren und Formen“. (Formenlehre und Inhaltslehre: Vollrath, 1999). Aus diesem Grund wird der Aspekt des Messens im Sinne der Inhaltslehre nach Vollrath den Figuren und Körpern als eigenständige, mathematische Tätigkeit untergeordnet. Er findet sich in der Tabelle unter Interpretieren als Übersetzungsleistung zwischen Geometrie und Algebra und Arithmetik. Dahinter verbergen sich weitere Tätigkeiten und Fertigkeiten, die in einer separaten Strukturierung erfasst werden sollen.

Methodik

Der Erstellung der Referenzmodelle geht eine umfassende Literatursicht des jeweiligen Inhaltsbereichs voraus. Die angewandte Methodik ist im Rahmenvortrag "Referenzmodelle für die summative Konkretisierung grundlegenden Wissens und Könnens am Ende der Sekundarstufe" nachzulesen. Die Ergebnisse der Literatursuche wurden mit einer Zusammenfassenden Qualitativen Inhaltsanalyse durchgearbeitet. Das entstandene Kategoriensystem bildet die Grundlage der jeweiligen Referenzmodelle.

Ausblick

Die erhaltenen Referenzmodelle sind als vorläufig zu betrachten, da die Literatursuche noch nicht abgeschlossen ist. Aktuell sind nur einzelne Aspekte in die jeweiligen Referenzmodelle eingeflossen. Nach Abschluss der Recherche und Bildung der Kategorien soll eine Inhaltsvalidierung durch eine Expertenbefragung erfolgen. Inwieweit die Referenzmodelle als Instrumente zur Bewertung und Analyse von Diagnose- und Fördermaterialien geeignet sein werden, soll abschließend durch eine Strukturierende Qualitative Inhaltsanalyse mit Semiexperten geklärt werden. Als Semiexperten werden in diesem Zusammenhang Lehramts-Studierende gesehen.

Literatur

Anderson, J. R. (1996). Kognitive Psychologie (2. Aufl.). Heidelberg: Spektrum.

Barzel, B., & Herget, W. (2006). Zahlen, Symbole, Variablen – abstrakt und konkret. mathematik lehren, 136, 2–9.

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B., & Weigand, H.-G. (Hrsg.). (2015). Handbuch der Mathematikdidaktik. Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analysing difficulties in geometry from the perspective of visual perception, Educational Studies in Mathematics, 74(2), 163–182.

Griesel, H. (1982). Bemerkungen zum Variablenbegriff. Mathematische Semesterberichte, 29(1), 68–81.

Griesel, H. (2015). Arnold Kirsch und der Begriff Größenbereich. Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 41(98), 14–17.

KMK (2003). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, München: Luchterhand. Abgerufen von https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf

Krauter, S. (2005). Größen im Mathematikunterricht. Seminarmanuskript, PH Ludwigsburg. Abgerufen von https://www.ph-ludwigsburg.de/fileadmin/subsites/2e-imix-t-01/user_files/personal/krauter/kurse/WS_05_06/Pruefungsseminar/Groessen.pdf

Küchemann, D. (1978). Children's Understanding of Numerical Variables. Mathematics in School, 7(4), 23–26.

Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg.

Musgrave, S., Neil Hatfield, & Patrick Thompson. (2015). Teachers' meanings for the substitution principle. In T. Fukawa-Connelly, N. Engelke Infante, K. Keene, & M. Zandieh (Hrsg.), Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education (S. 801–808). Pittsburgh: Mathematical Association of America. Abgerufen von http://pat-thompson.net/PDFversions/2015MusgraveSubstitution.pdf

Pinkernell, G., Düsi, C., & Vogel, M. (2017). Aspekte des Wissens und Könnens der elementaren Algebra. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2017 (S. 769-772). Münster: WTM-Verlag.

Schoenfeld, A., & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. The Mathematics Teacher 81(6):420–27.

Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. Journal für Mathematik-Didaktik, 10(1), 3–37.

Vollrath, H.-J. (1999). Bund-Länder-Kommission (Fortbildungsprojekt, Leitung Prof. Dr. P. Baptist, Universität Bayreuth), Beitrag zu Modul 4: Mit geometrischen Formeln Beziehungen erkennen. Abgerufen von http://blk.mat.uni-bayreuth.de/links/mumat.html

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., …, Wittmann, G. (2014). Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I. Berlin, Heidelberg: Springer.