Maria WALDLEITNER, Anselm STROHMAIER &
Frank FISCHER, München

Erfassung von mathematischer Argumentationskompetenz an der Hochschule: Überprüfung von Kompetenzstrukturmodellen in der Teilbarkeitslehre

Mathematisches Argumentieren stellt Lernende vor eine große Herausforderung. Geeignete Unterstützungsmaßnahmen für die Vermittlung von mathematischer Argumentationskompetenz können aus der Kenntnis der Kompetenzstruktur abgeleitet werden. Als Grundlage für die Überprüfung der Kompetenzstruktur dienten Daten aus insgesamt vier Erhebungen des ELK- Math Projektes (DFG-Projekt). Ziel des ELK-Math Projektes war die Verbesserung der mathematischen Beweis- und Argumentationskompetenz. Der Einbezug von insgesamt vier Erhebungen führte zu einer großen Stichprobe, sodass verlässliche Aussagen aus den Ergebnissen der Faktorenanalysen gezogen werden konnten.

1. Theoretischer Hintergrund

Unter mathematischer Argumentationsfähigkeit wird die Fähigkeit verstanden, eine mathematische Aussage finden, Argumente für und gegen diese mathematische Aussage entwickeln, diese Argumente hinsichtlich mathematischer Kriterien beurteilen sowie auswählen und zu einem Beweis zusammenführen zu können (Reichersdorfer et al., 2012). In der Definition wird deutlich, dass sich mathematische Argumentationskompetenz nicht nur auf eine Argumentation bezieht, sondern auch das Aufstellen von Vermutungen und die Formulierung von Aussagen eine Rolle spielen.

Beweisen stellt ein Kernstück der Mathematik dar. Es handelt sich um einen deduktiven Vorgang, bei dem nach streng logischen Regeln Aussagen aus anderen bereits als wahr postulierten Aussagen abgeleitet werden. Ein Beweis dient dazu zu zeigen, dass die aufgestellte Behauptung aus der Voraussetzung folgen muss bzw. daraus abgeleitet werden kann (Brunner, 2014). Damit die Gemeinschaft der Fachwissenschaftler den Beweis nachvollziehen kann, ist zudem ein gewisser Grad an Formalisierung notwendig.

Conjecturing bezeichnet die Ableitung von Gemeinsamkeiten und Regelmäßigkeiten aus verschiedenen betrachteten Fällen (Lin, Yang, Lee, Tabach & Styliandes, 2012), die Formulierung einer Vermutung und den Beweis der Vermutung (Koedinger, 1998). Dabei wird auch die Passung der aufgestellten Vermutung mit den gefundenen Regelmäßigkeiten überprüft. Dies zeigt, dass unter Conjecturing nicht nur die Entwicklung von Ideen gemeint ist, sondern auch die ständige Evaluation der Vermutung und die Lösung des Problems.

Mathematische Argumentationsaufgaben können in unterschiedlicher Form vorliegen. Eine wichtige Rolle nimmt der Repräsentationswechsel ein, den jedoch nicht alle Aufgabenstellungen erfordern. Dieser erfordert den Wechsel zwischen visuellen und formalen, symbolischen Darstellungen.

Mithilfe von theoretischen Kompetenzmodellen können diese unterschiedlichen Anforderungen strukturiert werden. Erste Forschungsergebnisse weisen darauf hin, dass ein vierdimensionales Modell die Kompetenzstruktur besser darstellen kann, als ein eindimensionales Modell (Reichersdorfer, 2013). Hierbei wurden Überlegungen zum Vorliegen eines drei- bzw. vierdimensionalen Modells aufgestellt. Das dreidimensionale Modell setzt sich aus den Dimensionen *technisches Beweisen*, *komplexes Beweisen* und Conjecturing zusammen. Aufgaben des technischen Beweisens müssen nicht formalisiert werden, wohingegen Aufgaben des komplexen Beweisens eine Formalisierung notwendig machen und so einen Repräsentationswechsel auf die symbolische Ebene erfordern. Die Dimension Conjecturing zeichnet sich dadurch aus, dass vor der Bearbeitung der Aufgabenstellung entschieden werden muss, ob diese bewiesen oder widerlegt werden muss. Weber und Alcock (2004) verweisen darauf, dass je nachdem ob eine Aussage bewiesen oder widerlegt werden soll, unterschiedliche kognitive Prozesse benötigt werden. Daher kann die Annahme aufgestellt werden, dass die dritte Dimension des dreidimensionalen Modells in die zwei Teile Conjecturing mit wahren Aussagen und Conjecturing mit falschen Aussagen geteilt werden kann. So ergibt sich ein insgesamt vierdimensionales Modell. Beispiele der einzelnen Dimensionen sind im Folgenden aufgeführt:

- Technisches Beweisen: Beweisen Sie, dass folgende Aussagen für alle natürlichen Zahlen a und b (beide ungleich 0) richtig sind!
  WENN 6 teilt (4a+7b) DANN 12 teilt (8a+14b)
- Komplexes Beweisen: Beweisen Sie die folgenden Aussagen!
  Wenn man drei aufeinanderfolgende ungerade Zahlen miteinander multipliziert, dann ist das Produkt immer durch drei teilbar.
- Conjecturing mit wahren Aussagen: Beweisen oder Widerlegen Sie:
  Wenn man eine ungerade Zahl quadriert und 1 subtrahiert, erhält man eine durch 8 teilbare Zahl.
- Conjecturing mit falschen Aussagen: Beweisen oder Widerlegen Sie:
  Wenn die Summe zweier Zahlen gerade ist, dann ist deren Produkt immer gerade.

2. Forschungsfragen

Kann das vierdimensionale Kompetenzstrukturmodell zur Erfassung mathematischer Argumentationsfähigkeit anhand von vier Erhebungen des ELK – Math Projektes bestätigt werden?

Kann die Kompetenzstruktur durch ein anderes mehrdimensionales Modell dargestellt werden?

3. Methode

Insgesamt ergab sich eine Stichprobengröße von n = 1196 (M_{Alter} = 19,80, SD_{Alter} = 2,86, weiblich = 558, männlich = 605, ohne Angabe = 33). Die Items stammten aus Vor- und Nachtest des zweiwöchigen Brückenkurses, der im Rahmen des ELK-Math Projektes für angehende Mathematikstudierende durchgeführt wurde. Es wurden 20 Items verwendet, wobei 8 Items auf die Dimension technisches Beweisen, 6 Items auf komplexes Beweisen und jeweils 3 Items auf die beiden Dimensionen des Conjecturing entfielen. Die Items wurden auf einer Skala von 0-3 (technisches Beweisen und komplexes Beweisen) bzw. auf einer Skala von 0-4 (Conjecturing) kodiert. Um die Vergleichbarkeit zwischen den einzelnen Erhebungen zu gewährleisten, wurden die Aufgaben für jede Erhebung separat z-standardisiert.

4. Ergebnisse und Diskussion

Eine konfirmatorische Faktorenanalyse bestätigte die signifikant bessere Passung des drei- bzw. vierdimensionalen Modells im Vergleich zum eindimensionalen Modell, sodass die Eindimensionalität des Modells eindeutig abgelehnt werden kann und so spezifische Fördermaßnahmen für jede Dimension abgeleitet werden können. Ein weiterer χ^2 – Differenzentest zeigte die signifikant bessere Eignung des vierdimensionalen Modells im Vergleich zum dreidimensionalen Modell. Eine Verletzung der Normalverteilung führte allerdings zu hohen χ^2– Werten (Baltes-Götz, 2010). Aufschluss über die Eignung der Modelle gaben gute Modell-Fits. Außerdem weisen die Items der Aufgaben des Conjecturing häufig niedrige Ladungen auf. Ein Grund hierfür könnte die geringe Itemanzahl dieser Faktoren sein. Diese ist zwar ausreichend für eine konfirmatorische Faktorenanalyse (Backhaus et al., 2015), aber nicht optimal (Bühner, 2010).

Mit einer exploratorischen Faktorenanalyse wurde eine alternative Modellstruktur untersucht. Diese enthielt Ansatzpunkte für eine mögliche Unterteilung des Faktors technisches Beweisen in die zwei Teile *technisches Beweisen mit Verwendung der Teilbarkeitsdefinition* und *technisches Beweisen mit Verwendung von Sätzen der Teilbarkeitslehre*. Daher wurde eine Strukturüberprüfung eines fünfdimensionalen Modells durchgeführt. Es handelte sich dabei um die vier Dimensionen des vierdimensionalen Modells mit zusätzlicher Unterteilung des Faktors technisches Beweisen. Der χ^2–Differenzentest ergab eine signifikant bessere Passung des fünfdimensionalen Modells im Vergleich zum vierdimensionalen. Möglich ist, dass die unterschiedliche Bearbeitung der Aufgaben daraus resultiert, dass Aufgaben mit Verwendung der Teilbarkeitsdefinition in der Vorlesung und den Übungen bereits bearbeitet und vertieft wurden. Dies könnte zu einer besseren Bearbeitung der entsprechenden Aufgaben im Vergleich zu den Aufgaben mit Verwendung von Sätzen zur Teilbarkeitslehre und daher zu einer unterschiedlichen Struktur der Daten geführt haben. Festzuhalten ist jedoch, dass der Faktor technisches Beweisen Aufgaben enthält, für deren Bearbeitung sich stark unterscheidende Ansätze und Ideen benötigt werden und so nicht zwingend von einer Dimension ausgegangen werden kann. Auch an dieser Stelle könnte eine Faktorenanalyse mit mehr Items für jeden Faktor noch genauere Ergebnisse liefern.

Literatur

Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W. & Weiber, R. (2015). *Multivariate Analysemethoden: Eine anwendungsorientierte Einführung*. 13. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer.

Baltes-Götz, B. (2010). Analyse von Strukturgleichungsmodellen mit Amos 18. *Online-Script. Universität Trier*.

Bühner, M. (2011). *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion*. Hallbergmoos: Pearson Deutschland.

Brunner, E. (2014). *Mathematisches Argumentieren und Beweisen: Grundlagen, Befunde und Konzepte*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Koedinger, K. R. (1998). Conjecturing and argumentation in high-school geometry students. In R. Lehrer & D. Chazan (Hrsg.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (S. 319-347). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lin, F. L., Yang, K. L., Lee, K. H., Tabach, M. & Stylianides, G. (2012). Principles of task design for conjecturing and proving. In *Proof and proving in mathematics education* (S. 305-325). Dordrecht: Springer Netherlands.

Reichersdorfer, E. (2013). *Unterstützungsmaßnahmen am Beginn des Mathematikstudiums: Heuristische Lösungsbeispiele und Problemlösen in problembasierten Lernumgebungen zur Förderung mathematischer Argumentationskompetenz*. Unveröffentlichte Dissertation, TU München, Deutschland.

Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., Kollar, I., Reiss, K. & Ufer, S. (2012). Different collaborative learning settings to foster mathematical argumentation skills. In *Proceedings of the 36th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 345-352).

Weber, K. & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics*, *56*(2-3), 209-234.