Hans WALSER, Frauenfeld

Rechtwinkliges Dreieck und Binomialverteilung

Worum geht es?

Durch iterierte Zerlegung eines rechtwinkligen Dreiecks durch die Höhe kommen wir zu den Binomialkoeffizienten und der Binomialverteilung.

Das Verfahren kann mit Schere und Papier nachvollzogen werden.

Die Überlegungen erfolgten auf Anregung von Glötzner (2017) und Hölzl (2017).

Zerlegungen des rechtwinkligen Dreiecks

Erster Schritt: wir zerlegen mit der zur Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe. Es entstehen zwei ungleich große Teildreiecke (Abb. 1).

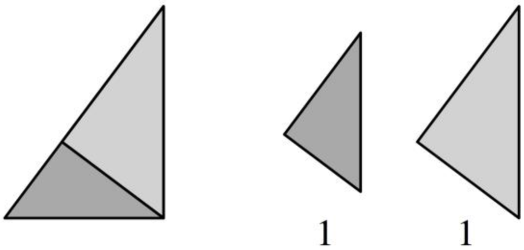

Abb. 1: Zerlegung durch die Höhe

Zweiter Schritt: Und nun kommt das Entscheidende. Wir zerlegen auch jedes der beiden Teildreiecke mit seiner Hypotenusenhöhe (Abb. 2).

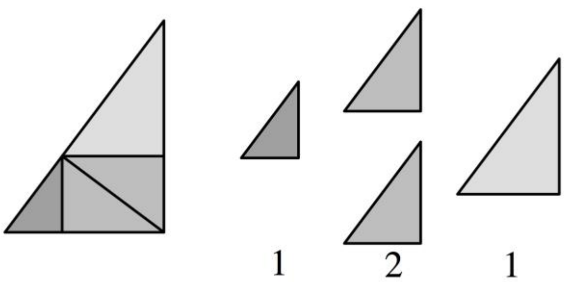

Abb. 2: Zweite Zerlegung durch die Höhe

Das gibt zunächst vier Teildreiecke. Dabei ist aus Symmetriegründen sofort klar, dass die beiden mittleren gleich groß sind. Das eine der beiden mittleren Dreiecke ist dabei das große Teildreieck vom vorhergehenden kleinen Teildreieck, und das andere das kleine Teildreieck vom vorhergehenden großen Teildreieck.

Die Anzahlen 1, 2, 1 erinnern an die Binomialkoeffizienten.

Die Abbildungen 3 und 4 zeigen die beiden weiteren Zerlegungen.

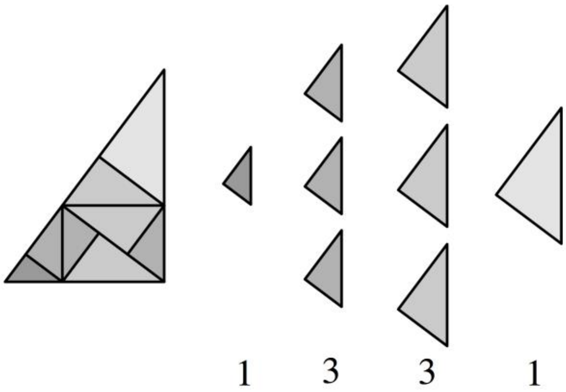

Abb. 3: Dritte Zerlegung

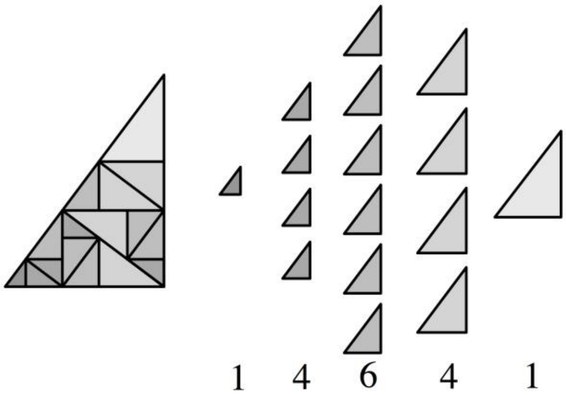

Abb. 4: Vierte Zerlegung

Binomialkoeffizienten

Die jeweiligen Anzahlen der Teildreiecke sind die Binomialkoeffizienten (Abb. 5).

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Abb. 5: Binomialkoeffizienten

Um dies exemplarisch einzusehen, vermischen wir die figürlichen Aufzählungen der Abbildungen 2 und 3. Die in der Abbildung 6 eingerahmten Teile entstammen der Abbildung 3, die anderen der Abbildung 2.

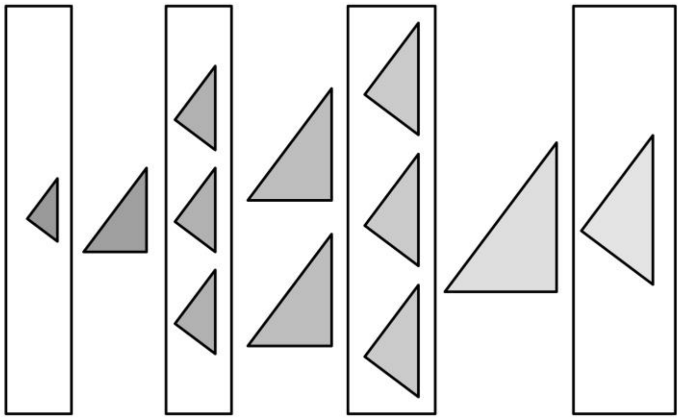

Abb. 6: Vermischung

Nun zerlegen wir die Dreiecke aus der Abbildung 3, also die in der Abbildung 6 weiß unterlegten Dreiecke, durch ihre Hypotenusenhöhen (Abb. 7).

Wir können die Teildreiecke nun eins zu eins (bijektiv) den eingerahmten Dreiecken zuordnen.

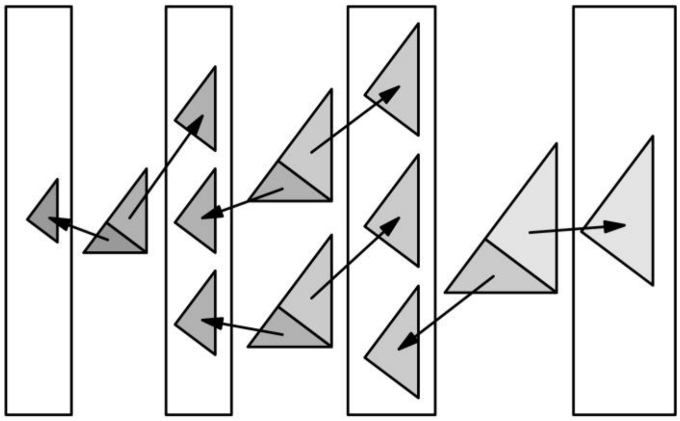

Abb. 7: Zerlegung und Zuordnung

Im Zahlendreieck der Binomialkoeffizienten haben wir damit die Zuordnung der Abbildung 8 vorgenommen.

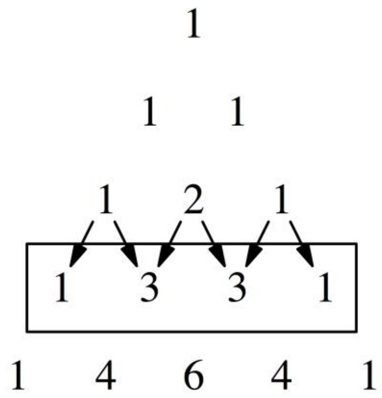

Abb. 8: Im Zahlendreieck

Damit ergibt sich allgemein die für die Binomialkoeffizienten relevante Rekursion:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Didaktische Randbemerkung

Die Zerlegungen können mit Schere und Papier nachvollzogen werden. So erhalten wir einen modellmäßigen Zugang zu den Binomialkoeffizienten.

Neckisch ist auch das Puzzle, die einzelnen Teildreiecke ohne Schnittvorlage wieder zum Startdreieck zusammenzufügen.

Literatur

Glötzner, Fabian (2017): Binomialverteilung erkunden. Beispiele untersuchen, systematisieren und erweitern. mathematik lehren 201, 36-41.

Hölzl, Reinhard (2017): Dreiecke in Dreiecke zerlegen. Welche Eigenschaften und Zusammenhänge findest du? mathematik lehren 201, 12-15.

Walser, Hans (2017): Dreiecksunterteilung und Binomialverteilung – In: Fachnewsletter mathematik lehren vom 18.9.2017

Walser, Hans (2017): Rechtwinklige Dreiecke ... . Ideenkiste. ml, mathematik lehren 204, 51.