Hans-Georg WEIGAND, Würzburg

Natürlich diskret, aber beachte die Folgen – Ein diskreter Zugang zu den Grundlagen der Analysis

Grenzwert- und Ableitungsbegriff sind zentrale Begriffe der Analysis. Die Diskussion um diese Begriffe durchzieht die gesamte Entwicklung der Mathematik und den Analysisunterricht in der Schule seit Beginn des 20. Jahrhunderts.

Der propädeutische Grenzwertbegriff im heutigen Analysisunterricht

Im Analysisunterricht ist heute – nicht nur in Deutschland, sondern weltweit – die Konzeption des sog. „propädeutischen Grenzwertbegriffs" das vorherrschende Konzept des Zugangs zum Grenzwertbegriff (vgl. etwa Törner u. a. 2014). Hierbei wird beim Zugang zur Analysis auf eine mathematische Definition des Grenzwertes zugunsten intuitiver Argumentationen verzichtet. Im Zusammenhang mit reellen Funktionen $f: x \to f(x)$, $x \in ID \subseteq IR$, werden Funktionswerte f(x) betrachtet, wenn x „sehr große Werte" annimmt bzw. x gegen eine Definitionslücke von f strebt. Damit einher gehen Sprechweisen wie: „x (bzw. f(x)) kommt einem Wert ... beliebig nahe" oder „x (bzw. f(x)) unterscheidet sich von ... beliebig wenig". Dieses Konzept liegt auch den KMK-Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife (KMK 2012) zugrunde.

Die historische Entwicklung des Grenzwertbegriffs

Der Ausbildung des Grenzwertbegriffs ist in enger Beziehung zu der des Unendlichkeitsbegriffs zu sehen. Dabei wird deutlich, wie *statische* und *dynamische*, *intuitive* und *formale* Sichtweisen im fortwährenden Wechsel auftreten, und wie in diesem Zusammenhang die einmal stärkere, dann wieder schwächere Bedeutung des Folgenbegriffs die Grundlagen und den systematischen Aufbau der Analysis beeinflusst hat (vgl. für einen allgemeinen Überblick über die Geschichte der Analysis Volkert 1988 oder Sonar 2011).

Die anspruchsvollen mathematischen Denkweisen insbesondere beim Verständnis des Grenzwertbegriffs waren der wesentliche Grund dafür, dass die Infinitesimalrechnung bis zum Beginn des 20. Jahrhundert kein Inhalt des Mathematikunterrichts an allgemeinbildenden Schulen war (vgl. hierzu Führer 1981). Die vor allem durch Felix Klein (1849-1925) initiierte „Meraner Reform" von 1905 leitet dann eine kontroverse Diskussion im Hinblick auf den Analysisunterricht am Gymnasium ein.

Es dauert bis in die 1950er Jahre, bis die Analysis als Gebiet der Schulmathematik etabliert war. In den 1960er Jahren wird der Analysisunterricht in

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.)
Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

der Schule im Hinblick auf eine stärkere Wissenschaftsorientierung in enger Anlehnung an die Hochschulmathematik entwickelt, wobei eine ausführliche Behandlung des Folgenbegriffs die Grundlage des Grenzwertbegriffs bildet. Das Konzept einer derartigen strengen Behandlung des Grenzwertbegriffs im Zusammenhang mit Folgen wurde vielfach kritisiert (etwa Pickert 1962). Heute hat sich das Konzept des „intuitiven" oder „propädeutischen Grenzwertbegriffs" nach den Überlegungen von Serge Lang (1927-2005) und Emil Artin (1898-1962) weitgehend durchgesetzt.

Dabei besteht allerdings die Gefahr, dass das Verständnis des Grenzwertbegriffs auf einer intuitiven oder lediglich kalkülorientierten Ebene – d. h. eine auf das Berechnen von Grenzwerten insbesondere im Zusammenhang mit dem Ableitungsbegriff – stehenbleibt.

Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff

Als wesentliche Voraussetzung für ein verständnisvolles Lernen und Lehren mathematischer Begriffe wird heute das Entwickeln von *Grundvorstellungen* angesehen (vgl. vom Hofe 1995 und 1996). Darunter werden *inhaltliche Deutungen* sowohl innermathematisch durch verschiedene Darstellungen und Visualisierung als auch außermathematisch durch adäquate Anwendungssituationen verstanden, die dem mathematischen Begriff *Sinn* geben. Mit *Grundvorstellungen* werden fachliche Aspekte eines mathematischen Begriffs erfasst und es wird ihnen Sinn und Bedeutung beigemessen (vgl. Greefrath u. a. 2016).

Dynamische und statische Aspekte

Dynamische Aspekte über die Möglichkeit eines „und so weiter" oder eines potentiell unendlichen Prozesses aufbauend auf dem (mentalen) sukzessiven Durchlaufen des Anfangs der natürlichen Zahlenfolge oder dem schrittweisen Zählen und der damit einhergehenden fortgesetzten Durchführung einer Handlung auf der enaktiven, ikonischen oder symbolischen Ebene bilden die intuitive Grundlage für den Unendlichkeitsbegriff und den Grenzwertbegriff. Betrachtet man dagegen den Grenzwertbegriff unter dem *statischen Aspekt*, so ist ein Abgehen von dynamischen Vorstellungen und eine „Umkehrung" der Argumentation bzgl. Folge und Grenzwert notwendig. Ausgehend von einem festen Wert oder einem geometrischen Objekt – wird das Folgenglied gesucht, ab dem alle weiteren Folgenwerte in einer vorgegebenen Umgebung des Objekts liegen. Diese „Umkehrung" der Denkrichtung ist die Grundlage der formalen Definition des Grenzwertes.

Im Folgenden werden – aufbauend auf der dynamischen und statischen Sichtweise des Grenzwerts – drei Grundvorstellungen unterschieden.

Die Annäherungsvorstellung

Das Zustreben von (Zahlen-)Werten gegen das Unendliche und das beliebige Annähern an einen festen Wert im Sinne von nachvollziehbaren Handlungen lassen sich gut durch schrittweise – diskrete – Annäherungen beschreiben. Damit sind Denkweisen verbunden, wie sie in der Mathematik durch den Folgenbegriff widergespiegelt werden. Die *Annäherungsvorstellung* beim Streben der Folgenglieder gegen Unendlich oder deren Annähern an einen festen Wert oder ein Objekt ist die zentrale intuitive Vorstellung vom Grenzwert.

Die Umgebungsvorstellung

Der dynamische Prozess des fortgesetzten Durchlaufens einer Folge wird durch die „Umkehrung" der Denkrichtung und dem Ausgehen von einem bestimmten Wert – dem Grenzwert – und einer beliebig klein zu wählenden Umgebung dadurch „gestoppt", dass bei einer vorgegebenen Umgebung ein Folgenglied gesucht wird oder angegeben werden kann, ab dem die weiteren Folgenwerte in dieser Umgebung liegen. Letztlich gilt es jetzt „nur" noch eine natürliche Zahl zu suchen, deren zugeordneter Folgenwert einer bestimmten Bedingung genügt. In diesem Sinne baut diese Vorstellung auf dem statischen Aspekt des Grenzwerts auf. Der *Umgebungsvorstellung* liegt die Idee zugrunde, dass zu jeder noch so kleinen Umgebung um den Grenzwert ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Glieder in dieser Umgebung liegen.

3.4 Die Objektvorstellung

Grenzwerte können eine Zahl, etwa bei einer Zahlenfolge oder bei der Bestimmung des Inhalts eines Kreises, ein geometrisches Objekt, etwa ein Punkt, eine Strecke oder eine Tangente als Grenzlage von Sekanten, eine Matrix, etwa bei stochastischen Prozessen, oder auch eine Funktion, etwa bei einer Funktionsschar, sein. Im Rahmen der *Objektvorstellung* werden Grenzwerte als mathematische Objekte – etwa (feste) Werte, Matrizen oder geometrische Objekte – angesehen, die durch eine Folge – etwa eine Zahlenfolge, eine Folge von Matrizen oder geometrischer Objekte – konstruiert oder definiert werden. Die Objektvorstellung betont den symbolischen oder formalen Aspekt des Grenzwertbegriffs.

Ein Stufenschema für einen diskreten Zugang zum Grenzwertbegriff

Im Hinblick einer stärkeren Betonung eines verständnisorientierten Unterrichts wird hier eine stärkere Entwicklung der zentralen Grundvorstellungen des Grenzwertbegriffs vorgeschlagen. Dies kann im Rahmen eines Stufenkonzepts erreicht werden, das auf dem Folgenbegriff aufbaut und obige

Grundvorstellungen frühzeitig entwickelt. Für eine ausführliche Darstellung siehe Weigand (2016).

1. Zugänge auf der numerischen und graphische Ebene in der Sek.stufe I

2. Kritische Überlegungen zum (intuitiven) Grenzwertverständnis

3. Explizit definierte Folgen

4. Rekursiv definierte Folgen – Der Iterationsaspekt

5. Eine Annäherung an die formale Definition des Grenzwertes

Mit dieser Stufe ist ein Verständnisniveau erreicht, das eine gute Grundlage dafür bietet, um Grundvorstellungen – insbesondere die Annäherungs- und die Umgebungsvorstellung – zum propädeutischen Grenzwertbegriff bei reellen Funktionen auf einer diskreten Ebene nachvollziehen zu können.

Literatur:

Artin, E. (1957). *A Freshman Honors Course in Calculus and Analytic Geometry, Taught at Princeton University*. Charlottesville, Virginia.

Führer, L. (1981). Zur Entstehung und Begründung des Analysisunterrichts an allgemeinbildenden Schulen. *Der Mathematikunterricht 27*, H. 5, 81-122.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller S., Ulm, V., Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis*. Berlin u. a.: Springer.

Hofe, vom, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Hofe vom, R. (1996). Über die Ursprünge des Grundvorstellungskonzepts in der deutschen Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik-Didaktik. 17,* No. 3-4, 238–264.

KMK (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife* (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012).

Lang, S. (1962). *A first Course in Calculus*. Amsterdam u. a.: Springer.

Pickert, G. (1962). Die Einführung des Stetigkeits- und Grenzwertbegriffs in der Schule, *L'Enseignement Mathématique 8*. 303–310.

Sonar, T. (2011). *3000 Jahre Analysis – Geschichte, Kulturen, Menschen*. Berlin u.a.: Springer.

Törner, G., Potari, D., Zachariades, Th. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM –Mathematics Education, 4,* 549-560.

Volkert, K. (1988). *Geschichte der Analysis*. Mannheim u. a.: BI

Weigand, H.-G. (2016). Zur Entwicklung des Grenzwertbegriffs unter stoffdidaktischer Perspektive. *Mathematische Semesterberichte, 63*, H. 1, 135-154.