

Kegelschnitte im Mathematikunterricht der letzten 150 Jahre

Das Auftauchen und Verschwinden der Kegelschnittlehre im Mathematikunterricht bietet zukünftigen MathematiklehrerInnen reichhaltige Möglichkeiten sich mit eigenen Traditionen, zum Beispiel der des Gymnasiallehrerberufes und des Unterrichtswesens sowie mit Beziehungen zwischen Entwicklungen in der Mathematik und deren Lehre zu beschäftigen. Für Lehrende einer sich am Fach orientierenden Schulmathematik ist die Beschäftigung mit Beziehungen und Zusammenhängen zwischen moderner Mathematik und Elementarmathematik von grundlegender Bedeutung. Die hohe Abstraktion und deduktive Darstellung moderner Mathematik führt bei Studierenden gleichwohl häufig zu dem Eindruck, dass ihr Mathematikstudium wenig mit ihrer zukünftigen Tätigkeit als Lehrende zu tun hat.

Dieser Widerspruch zwischen der Wissenschaft Mathematik und der exemplarisch elementarisierenden Schulmathematik war im 19. Jahrhundert Grundlage verschiedener fruchtbarer Diskurse, welche zur Transformation eines bis dahin durch die Elemente des Euklid bestimmten gymnasialen Geometrieunterrichts führten. Die Beschäftigung mit der Entwicklung des Geometrieunterrichts des 19. Jahrhunderts ist besonders aufschlussreich, da hier Forschung und Elementarisierung für den Mathematikunterricht sowohl in zeitlich kurzen Abständen als auch oft durch die gleichen Akteure erfolgte. So schreibt Max Simon: „Überblickt man die Elementargeometrie im 19. Jahrhundert, so ist vor allem hervorzuheben, wie die großen Strömungen der Wissenschaft auch in der Elementargeometrie zutage treten“ (Simon, 1911). Diese Entwicklungen sind u.a. darstellende Geometrie (Monge), Geometrie der Lage (Carnot, von Staudt), geometrische Konstruktionen (Steiner), projektive Eigenschaften (Poncelet), baryzentrische Koordinaten (Möbius), Lineare Algebra, Algebra (Graßmann, Plücker), Analytische Geometrie (Gergonne).

Unter dem Banner der Neueren Geometrie finden Forschungen im Wissenschaftsgebiet Geometrie und Reformbestrebungen des Mathematikunterrichts zusammen. „Die neuere Geometrie bildet ihrer Entstehung nach einen Gegensatz nicht so sehr zur Geometrie der Alten wie zur Analytischen Geometrie ... Die analytische Geometrie ist dem Stoffe nach eine Fortsetzung, der Methode nach ein Gegensatz zu den Elementen“ (Pasch, 1882, S. 1). Die unmittelbare Verknüpfung neuer Strömungen in der Mathematik mit Unterrichtsreformen wird auch durch die Professionalisierung des Lehrerberufs, Neuordnung des Schulsystems, die Entwicklung neuer Lehrpläne sowie Veränderungen im Hochschulsystem gefördert. So wird 1810 die

Prüfung für Lehrer höherer Schulen in Preußen eingeführt, welche nicht nur gründliche Kenntnisse philologischer und historischer sondern auch mathematischer Art verlangt. 1812 folgen als allgemeingültige Vorgaben für die Abiturprüfung die Kenntnis der Bücher des Euklid 1-6, 11 und 12. Mit dem Süvernschen „Normalplan“ (1816) und einer erweiterten Stundentafel für den Mathematikunterricht werden die Kegelschnitte in analytischer Behandlung zum Unterrichtsgegenstand der Sekunda des Gymnasiums. Mit der Aufnahme der Kegelschnitte in den Lehrplan erscheinen auch Schulbücher mit verschiedenen Zugängen zu Kegelschnitten. Einen Eindruck über verschiedene Darstellungen kann man sich leicht durch in digitaler Form vorliegende oder antiquarisch erhältliche Schulbücher dieser Zeit verschaffen. So nimmt der Theologe Johann Andreas Matthias (Matthias, 1813) in seinem Lehrbuch den Zugang über die Apollonische Kegelschnittlehre. Der Mathematiker Johann August Grunert nutzt in seinem Lehrtext mit Aufgaben und deren vorgeführten Lösungen zur Behandlung aller Kegelschnitte die analytische Methode (Grunert, 1824). Auch der Mathematiker, Philosoph, Reformpädagoge, Politiker, Schulmann und Gründer des Berliner Pädagogischen Seminars Karl Heinrich Schellbach verfasst 1843 ein Lehrbuch zu Kegelschnitten, welches von Max Simon verlegt wird. Einen Einblick in spätere Lehrtexte, die auch projektive Zugänge berücksichtigen sowie eine detaillierte Analyse der Darstellung der Neueren Geometrie in einigen Schulbüchern gibt Sebastian Kitz in seiner Dissertation zur Neueren Geometrie als Unterrichtsgegenstand der höheren Lehranstalten zwischen 1870 und 1920. (Kitz, 2015). Beispiele des von Max Simon beschriebenen Zutagetretens moderner Strömungen in der Elementargeometrie sind Hermann Hankels (Hankel, 1875) und Jakob Steiners (Steiner, 1876) synthetische Behandlungen der Kegelschnitte. Die Erwartungen an die reformierende Kraft der Neueren Geometrie zeigt sich in Hankels Neufassung der bekannten Anekdote: „... Es giebt keinen Königsweg zur Geometrie. Wir aber können hinzufügen: Die neuere Geometrie ist dieser Königsweg“ (Hankel, 1875, S. 33). Trotz der hohen Erwartungen an die Neuere Geometrie und deren rasche Entwicklung als Wissenschaftsgebiet kam es in der Schulreform zunächst zu Rückschlägen. Die Entscheidung zwischen Synthetischer und Analytischer Geometrie, Euklidischer und Neuerer Geometrie wurde in den Gymnasien zunächst zugunsten der Euklidischen Geometrie ohne Einbeziehung der Kegelschnitte entschieden. So erfolgten 1837 durch ein Preußisches Zirkularreskript von Johann Schulze, dem Nachfolger Süverns, eine Reduktion der Stundentafel für Mathematik und der Wegfall der Lehre der Kegelschnitte im Gymnasium. Detaillierteres und Beispiele zur Umsetzung der Lehrpläne von Süvern und Schulz findet man u.a. in der Studie der Geschichte des Ratsgymnasiums

Bielefeld (Biermann 2010) und in der Dissertation von Martina Strub (Strub 2008, S. 67 ff). Letztere gibt auch Aufschluss bezüglich des dem Altphilologen Johannes Schulze zugeschriebenen in diesem Kontext gern genutzten Zitates „...in einer Zeile des Cornelius Nepos liegt mehr bildende Kraft als in zwanzig mathematischen Formeln“. Erst 1864 kam es auf der Philologenversammlung Jena zur Gründung der mathematisch-pädagogischen Abteilung und zur Belebung der Diskussion des Themas Kegelschnitte für den Unterricht an Gymnasien. In den Diskussionen erfolgte eine Verknüpfung der Behandlung der Kegelschnitte in analytischer Form mit dem Begriff der Variablen und dem Funktionsbegriff, dadurch mit den Meraner Reformbestrebungen zur Einführung der Differential- und Integralrechnung (Schimmack, 1911). Die Meraner Reformvorschläge berücksichtigten jedoch nicht nur die Teile der Kegelschnittlehre, die direkten Bezug zum Funktionsbegriff haben, sondern empfahlen die Behandlung der Kegelschnitte sowohl in analytischer als auch in synthetischer Form, mit Anwendung auf die Elemente der Astronomie, gleichwohl ohne Erläuterungen zur Umsetzung. Eine andere Quelle der Reformierung der euklidischen Tradition des Geometrieunterrichts ist die Entwicklung der Anschauungslehre. Das von Felix Klein als „äußerst beachtenswertes Buch“ (Klein, 2016, S. 512) empfohlene dreibändige Geometriebuch von Henrici und Treutlein (Henrici & Treutlein, 1981-1983), sowie Treutleins Anschauungslehre (Treutlein, 1911) geben hier einen guten Eindruck einer vielseitigen, die verschiedenen Zugänge berücksichtigenden, pädagogisch reichhaltigen Kegelschnittlehre. So verbindet Treutlein abbildungsgeometrisch die ebene Geometrie mit der Raumgeometrie durch Spiegelungen, schafft Anwendungsbezüge und nutzt Falten und Modelle zur Schulung der Anschauung (Weiss, 2016). Anfang des 20. Jahrhunderts bis zur Neuen Mathematik der 70er Jahre findet man in Lehrbüchern nebeneinander planimetrische, stereometrische, analytische, affine, perspektivische, projektive bis hin zu gruppentheoretischen Auffassungen der Kegelschnittlehre, meist nahe an der Darstellung von Walter Lietzmanns Elementarer Kegelschnittlehre (Lietzmann, 1949). Bis Ende der 60er Jahre kann man von der Blütezeit der Kegelschnitte sprechen, die Neue Mathematik brachte für die Kegelschnittlehre Zusammenhänge zur Differential- und Integralrechnung sowie mengentheoretische und abbildungsgeometrische Betrachtungen. Mit der Neugestaltung der Oberstufe 1975 und einheitlichen Prüfungsanforderungen wurde die Kegelschnittlehre in der Analytischen Geometrie mehr und mehr auf lineare Strukturen und in der analytischen Behandlung auf die Untersuchung des Funktionsgraphen von Parabeln reduziert (Schupp, 1988) und ist heute als Unterrichtsgegenstand verschwunden. Wäre es nicht an der Zeit, da offen zugegeben wird, dass in den Hochschulen zu Beginn

eines mathematisch-naturwissenschaftlichen Studiums die heutige schulische lineare Algebra und Differential- und Integralrechnung vollständig neu erarbeitet werden müssen, diese auch wieder den Hochschulen zu überlassen und die durch ihre Vielfalt, Systematik und Exemplarizität hervorragend für die Schule geeignete Kegelschnittlehre neu ins Auge zu fassen?

Literatur

- Biermann, H. R. (2010). *Praxis des Mathematikunterrichts 1750-1930. Längsschnittstudie zur Implementation und geschichtlichen Entwicklung des Mathematikunterrichts am Ratsgymnasium Bielefeld*. Berlin: Logos.
- Grunert, J. A. (1824). *Die Kegelschnitte: ein Lehrbuch für den öffentlichen und eignen Unterricht*. Leipzig und Sorau: Friedrich Fleischer.
- Hankel, H. (1875). *Die Elemente der Projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung*, Leipzig: BG Teubner.
- Henrici, J. & Treutlein, P. (1881-1883). *Lehrbuch der Elementar-Geometrie* (3 Bde.) Leipzig: BG Teubner.
- Kitz, S. (2015). „*Neuere Geometrie*“ als Unterrichtsgegenstand der höheren Lehranstalten. Ein Reformvorschlag und seine Umsetzung zwischen 1870 und 1920. Dissertation im Fachbereich C der Bergischen Universität Wuppertal.
- Klein F. (1909). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus*, Teil 2, Geometrie, Leipzig: BG Teubner
- Lietzmann, W. (1949). *Elementare Kegelschnittlehre*. Bonn: F. Dümmers Verlag.
- Matthias, J. A. (1813). *Leitfaden für einen heuristischen Schulunterricht über die allgemeine Grössenlehre und die gemeine Algebra, die Elementargeometrie, ebene Trigonometrie und die Apollonischen Kegelschnitte*. Magdeburg: W. Heinrichshofen.
- Pasch, M. (1882). *Vorlesungen über Neuere Geometrie*. Leipzig: BG Teubner.
- Schimmack, R. (1911). *Die Entwicklung der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland*. Leipzig und Berlin: BG Teubner.
- Schupp, H. (1988). *Kegelschnitte*. Mannheim: BI Wiss. Verlag.
- Simon, M. (1906). *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19 Jahrhundert, Bericht der Deutschen Mathematikervereinigung*. Leipzig: BG Teubner.
- Steiner, J. (1876). *Vorlesungen über Synthetische Geometrie, Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften*. Leipzig: BG Teubner.
- Strub, M. (2008). *Das nachsichtslose Einprägenwollen hilft zu nichts: vom Rechnen zur Mathematik in der höheren Mädchenbildung im 19. und frühen 20. Jahrhundert*. Dissertation, Universität Bremen.
- Treutlein, P. (1911). *Der geometrische Anschauungsunterricht als Unterstufe eines zweistufigen geometrischen Unterrichtes an unseren Höheren Schulen*, Leipzig: B.G. Teubner.
- Weiss-Pidstrygach, Y. (2016). *Historische, pädagogische und geometrische Kontextualisierungen zu Treutleins Schulmodellsammlung – Projektarbeit in der Lehrerbildung*. In: T. Krohn & S. Schöneburg (Eds.), *Mathematik von einst für jetzt*. Festschrift für Karin Richter, Hildesheim: Franzbecker, S. 233-246.