Frederike WELSING, Wuppertal

Grundschulkinder argumentieren mit Anschauungsmitteln – Epistemologisch orientierte Analyse von Argumentationsprozessen im Kontext anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften

„Mathematik ist die Wissenschaft von Mustern. Der Mathematiker untersucht abstrakte ‚Muster' […]. Solche Muster sind entweder wirkliche oder vorgestellte, sichtbare oder gedachte, statische oder dynamische, qualitative oder quantitative, auf Nutzen ausgerichtete oder bloß spielerischem Interesse entspringende" (Devlin 2002, 5). Dies spiegelt sich auch im Mathematikunterricht der Grundschule wider. Sollen Kinder in der Grundschule „Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern [...] erkennen, beschreiben und fortsetzen" (KMK 2004, 10), werden drei zentrale Aspekte relevant: *Muster und Strukturen*, *Argumentieren* sowie *semiotischen Repräsentationen*. *Muster und Strukturen* als abstrakte mathematische Begriffe, deren Inhalt in Beziehungen und Relationen besteht, bedürfen einer *semiotischen Repräsentation*, um dem Denken zugänglich zu werden (Otte 1983). Gleichzeitig bieten diese *Argumentationspotential*. Das Wechselspiel der drei epistemologisch komplexen Bedingungen wird im Rahmen dieses Forschungsprojektes untersucht und charakterisiert.

Theoretischer Hintergrund

Zentral für das Forschungsprojekt zum Argumentieren anschaulich dargestellter struktureller Zahleigenschaften sind räumliche Muster (ein ausführlicher Überblick findest sich bspw. in Lüken 2012). Diese stellen Mengen dar, die „als Objekte in Gestalt von figuralen Prototypen veranschaulicht und in einem meist einheitlich strukturierten Format miteinander in Beziehung gebracht [werden]" (Hess 1997, 213f. nach Lüken 2012, 40). Im Grundschulunterricht treten räumliche Muster häufig als Punktmuster auf und bieten ein vielfältiges Potential für das Mathematiklernen. So lassen sich z.B. strukturelle Zahleigenschaften, wie Paritäten, als figurale Prototypen darstellen (vgl. Abb. 1). Räumliche Muster dienen als semiotische Repräsentationen des mathematischen Begriffs und bieten gleichzeitig vielfältige Argumentationsanlässe. Argumentationen im Mathematikunterricht unterscheiden sich zu wissenschaftlichen Argumentations- und Beweisprozessen. Kinder verfügen (noch) nicht über die Sprache der Algebra, so dass Anschauungsmittel als Argumentationsmittel in den Fokus rücken. Auch argumentieren Kinder nicht logisch stringent. Sie nutzen ganz

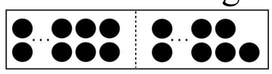


Abb. 1: figurale Prototypen gerader & ungerader Zahlen

unterschiedliche mathematische aber auch nicht-mathematische Ausgangspunkte. Aus dieser theoretischen Orientierung leiten sich folgende Forschungsfragen ab: Welche Voraussetzungen und Grundannahmen nutzen Kinder? Welche mathematischen Mittel stehen Grundschulkindern im Kontext des Argumentierens zur Verfügung und wie nutzen und deuten Kinder diese Mittel?

Forschungsdesign

Um die Argumentations- und Deutungsprozesse zu untersuchen, wurden klinische Interviews mit 24 Drittklässlern aus 4 Klassen durchgeführt. Es wurden Erkundungen und Argumentationen zu strukturellen Zahleigenschaften der Parität und der Teilbarkeit durch 3 initiiert. Grundlegend waren prototypische und nicht prototypische Punktmuster (vgl. Abb. 2), um eine Deutungsvielfalt zu eröffnen. Die Analyse erfolgt mit dem „Epistemologisches Dreieck“ (Steinbring 2005). Dieses stellt ein besonders geeignetes Instrument dar, da Argumentationen immer Deutungen mathematischer Begriffe erfordern. Mathematische Zeichen/Symbole werden vor dem Hintergrund eines individuellen Referenzkontextes gedeutet. Durch das Wechselspiel zwischen Zeichen/Symbol sowie Referenzkontext werden Begriffsbildunsprozesse initiiert. Es bietet somit die Möglichkeit die individuellen Referenzkontexte und damit die Ausgangslage der Argumentation sowie die Deutung und Nutzung der Anschauungsmittel zu analysieren.

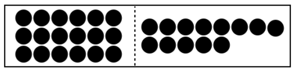


Abb. 2: nicht prototypische Darstellungen

Erste Ergebnisse der Interviewstudie

B: *(.) Hmmmmm [überlegt 5 sec. und nimmt sich P6] das ist ne ungerade.*
I: *Woher weißt du das?*
B: *Weil, ähm, weil das 13 ist.*
I: *mhm*
B: *Und 13 kann man nicht durch 2 teilen. Man kann 12 und 14 durch 2 teilen, aber 13 liegt dazwischen, also kann man die nicht durch 2 teilen.*

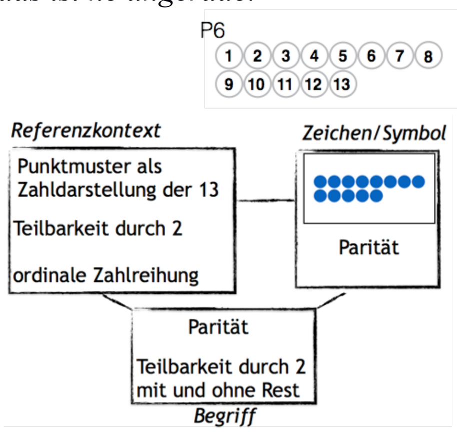


Abb. 3: Benjamin deutet P6 I.

Benjamin deutet die Zahlenkarte P6 hinsichtlich der Parität vor dem Hintergrund seines individuellen Referenzkontextes. Das Muster dient zunächst als Mittel zur Zahldarstellung und repräsentiert die Zahl 13. Die Parität betrachtet er mit dem Fokus der (Nicht-)Teilbarkeit durch 2 und begründet dies mit der ordinalen Anordnung gerader und ungerader Zahlen innerhalb der natürlichen Zahlen. 13 liegt zwischen den geraden Zahlen 12 und 14 und ist somit ungerade. Das Wechselspiel zwischen Referenzkontext und Zeichen/Symbol führt zu einer ersten Annäherung an den Begriff der Parität im Sinne von Teilbarkeit durch 2. Er begründet die Parität unter Rückgriff auf seine *arithmetischen* Kenntnisse *ohne* Nutzung der Struktur des Punktmusters.

Benjamin wird nun mit einer neuen Deutungsanforderung konfrontiert und aufgefordert, die Parität anhand der Struktur des Punktmusters zu deuten.

B: *Äh, ja, weil ähm wenn ich jetzt den [zeigt auf P6.8] also das sind ja beides 5 [zeigt über P6.1-5 und P6.9-13] und wenn ich [zeigt auf P6.8] und hier sind 3 [zeigt auf P6.6-8], dann kann ich entweder einen dazutun [zeigt von P6.8 auf die Lücke unter P6.6 (1)] oder zwei hier hin tun [zeigt einen Bogen von P6.8 auf die Lücke unter P6.8 (1 und 2)], aber dann sind [wischt über das Punktmuster] es nicht beide äh die gleichen Zahlen, deswegen kann ich das auch nicht teilen.*

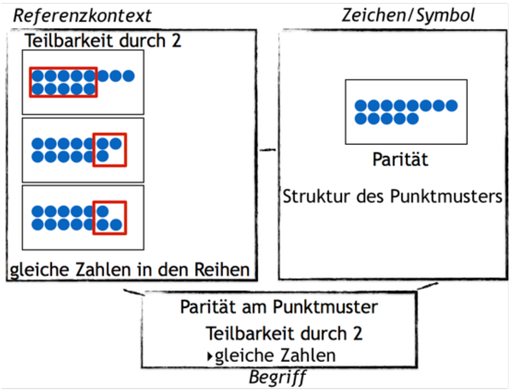
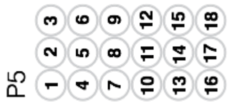


Abb. 4: Benjamin deutet P6 II.

Um dieser Anforderung gerecht zu werden, verändert sich sein Referenzkontext. Er sieht es weiterhin als grundlegend an, die Nichtteilbarkeit durch 2 zu zeigen. Dafür zerlegt er das Muster in zwei Struktureinheiten „*also das sind ja beides 5 [zeigt über P6.1-5 und P6.9-13] und wenn ich [zeigt auf P6.8] und hier sind 3*“. Er deutet die Parität des Punktmusters vor dem Hintergrund seines Referenzkontextes „gleiche Punktanzahl“. Deutlich wird dies durch die Angabe der Anzahlen in den Reihen „*beides 5*“. Er strukturiert die 3 weiteren Punkte um und versucht zwei Reihen mit gleichen Anzahlen zu erzeugen. Da dies nicht gelingt, schlussfolgert er, dass es sich um eine nicht durch 2 teilbare Zahl handelt „*aber dann sind [wischt über das Punktmuster] es nicht beide äh die gleichen Zahlen, deswegen kann ich das auch nicht teilen*“. Deutlich wird, dass durch das Wechselspiel zwischen dem neuen Referenzkontext und dem Zeichen/Symbol eine neue Annäherung an den Begriff der Parität entsteht. Der Fokus liegt nun auf gleichen Anzahlen in den Reihen. Dadurch wird eine für dieses Punktmuster (P6) tragfähige Argumentation entwickelt. Die Fokussierung gleicher Anzahlen ist möglich, wenn es sich um eine *gerade Anzahl gleicher Anzahlen* handelt. Dies ist durch die Struktur des Punktmusters gegeben. Von Benjamin bleibt dies aber unbeachtet.

Im weiteren Verlauf zeigt sich eine interessante erneute Veränderung des Referenzkontextes, indem er P5 vor dem Hintergrund seiner vorherigen begrifflichen Idee der Paritäten, die „gleiche Anzahlen“, deutet.

B: *Das hier ist gerade [schiebt P5 vor sich und drei es um 90°], weil da genau die gleiche Anzahl wieder ist*



Der Referenzkontext entsteht in Abhängigkeit zur vorherigen Argumentation. Es wird deutlich, dass er sich erneut auf den Aspekt „gleiche Anzahl" bezieht. Er geht davon aus, dass eine Zahl durch 2 teilbar ist, wenn Reihen mit gleichen Anzahlen identifizierbar sind. Er betrachtet weiterhin die mathematische Struktur der Parität auf Basis der Teilbarkeit durch 2. Sein Verständnis der mathematischen Struktur wird nur partiell auf die Struktur des Punktmusters übertragen. Weiterhin bleibt die Anzahl der gleichzahligen Reihen unberücksichtigt. Er begründet die Parität zwar unter *Nutzung der Struktur* des Punktmusters, es gelingt ihm aber noch nicht die mathematische Struktur vollumfänglich in das Punktmuster hineinzusehen.

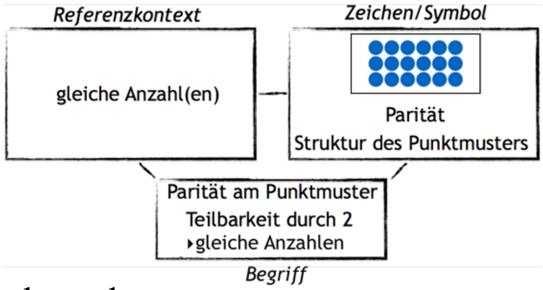


Abb 5: Benjamin deutet P5.

Fazit und Ausblick

In den kurzen Szenen wird deutlich, dass das Argumentieren mit und anhand von Veranschaulichungen eine neue Deutungsanforderung für Kinder darstellt. Die Struktur des Punktmusters muss mit der mathematischen Struktur in Beziehung gesetzt werden, um diese für die Argumentation nutzen zu können. Es zeigt sich, dass sich die Referenzkontexte als *Voraussetzungen der Argumentation* bei der Deutung unterschiedlicher Punktmuster verändern. Dieser Aspekt wird im weiteren Verlauf des Projektes untersucht und charakterisiert. Hierbei wird herausgearbeitet, welchen Einfluss die Referenzkontexte auf die Nutzung und Deutung der Veranschaulichungen haben.

Literatur

Devlin, K. (2002). *Muster der Mathematik: Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur*. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

Hess (1997). *Aufbau mentaler Mengenvorstellungen durch ein Repräsentationsformat mit figuralen Prototypen.* Beiträge zum Mathematikunterricht 1997, 211-214.

Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4).* München, Neuwied: Wolters Kluwer.

Lüken, M. (2012). *Muster und Strukturen im mathematischen Anfangsunterricht - Grundlegung und empirische Forschung zum Struktursinn von Schulanfängern.* Münster: Waxmann.

Otte (1983). *Texte und Mittel.* In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15, Heft 4, 183-194.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction – An Epistemological Perspective.* New York: Springer.