

Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten: Was führt zum Erfolg?

C.F. Gauß soll gesagt haben: „Meine Resultate habe ich längst, ich weiß nur noch nicht, wie ich zu ihnen gelangen soll.“ Ist dies auch eine Frage der Arbeitsrichtung *Vorwärtsarbeiten* (VA) bzw. *Rückwärtsarbeiten* (RA)?

Pólya und Dörner geben hierzu Empfehlungen: Pólya schreibt, dass VA die Gefahr birgt, Zeit mit der „Bearbeitung von Aufgaben [zu verbringen], die uns, selbst wenn gelöst, nichts helfen“ (Pólya 1967, S. 55f). Beim RA kann man sich zwar in einer nicht lös-baren Teilaufgabe verfangen, „wir [können] jedoch erwarten, die meiste Zeit auf das Lösen klar formulierter Aufgaben zu verwenden“ (ebd., S.57f). Pólyas Fazit ist daher, dass „im Allgemeinen [...] das regressive Planen, das Rückwärtsarbeiten, die Analyse [...] vorzuziehen [ist]“ (ebd., S.56). Für schwierige Aufgaben kann sich Pólya jedoch auch die Kombination aus VA

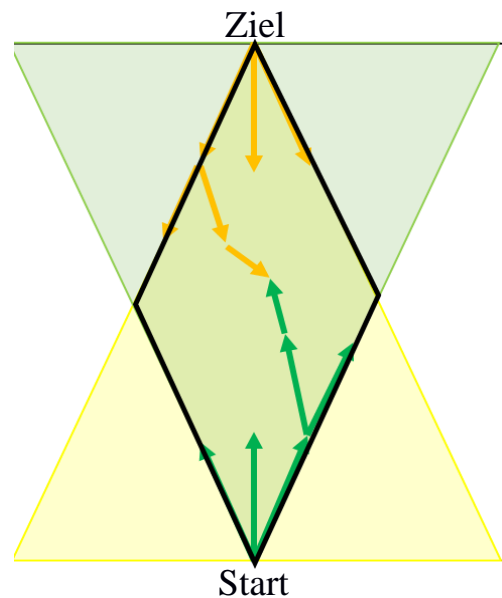


Abb. 1: Suchraum bei kombinier-tem VA und RA nach Dörner (1979, S.69)

und RA als hilfreich vorstellen. Dörner empfiehlt generell „zweiseitiges Problemlösen“, da dieses den Suchraum sehr wirkungsvoll einschränken könne: d.h. dass bei kombinierter Anwendung von VA und RA wie in Abb. 1 „nur der Überschneidungsraum beider Keile abzusuchen [ist], womit sich eine Einschränkung gegenüber der ‚reinen‘ Vorwärts- oder Rückwärtssuche ergibt“ (1979, S.69). Zudem können „damit Alternativen für die Wahl des aktuellen Zielpunktes erstellt werden, womit Material für die Prozedur des Zielwechslens zur Verfügung steht.“

Fragestellungen

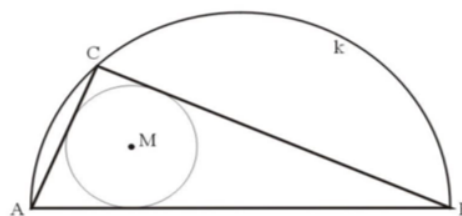
Daher stellten wir uns folgende per Inhaltsanalyse von Bearbeitungsprozessen der TIMSS-Aufgabe K10 (Gawlick 2014) zu beantwortende Fragen:

- 1) Lassen sich Probanden anhand ihrer Arbeitsrichtung typisieren?
- 2) Lässt sich ihr Erfolg nur anhand der Arbeitsrichtung prognostizieren?
- 3) Welche Arbeitsrichtung führt beim Problemlösen ggf. eher zum Erfolg?

Die Untersuchungsbasis

Wir analysierten 33 Prozesse von Neuntklässlern, denen die Aufgabe K10 wie in Abb. 2 gestellt wurde. Die Barriere liegt dabei darin, über $|\alpha| + |\beta| = 90^\circ$ und $|\alpha_1| + |\beta_1| = 45^\circ$ auf $\mu = \angle AMB$ zu schließen.

Schritt	Begründung
1	$ \gamma = 90^\circ$ SdT
2	$ \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ IWS IN ABC
3	$ \alpha + \beta = 90^\circ$ 1 & 2
4	$ \alpha_1 + \beta_1 + \mu = 180^\circ$ IWS in AMB
5	AM und BM sind Winkelhalbierende Satz vom Inkreis
6	$ \alpha_1 = \frac{ \alpha }{2}$ und $ \beta_1 = \frac{ \beta }{2}$ 5
7	$ \alpha_1 + \beta_1 = 45^\circ$ 6 & 3
8	$ \mu = 135^\circ$ 7 & 4



AB ist der Durchmesser eines Halbkreises k , C ist ein beliebiger Punkt auf dem Halbkreis (verschieden von A und B) und M ist der Mittelpunkt des Inkreises von ABC. Bestimme den Betrag des Winkels $\angle AMB$.

Abb. 2: Aufgabe K10 und Lösungsweg

Das Kodierwerkzeug

Zunächst operationalisierten wir die Begriffe „Vorwärts-“ und „Rückwärtsarbeiten“, um entsprechende Teile eines Bearbeitungsprozesses als VA und RA zu kodieren. Nicht eindeutig zuordbare Teile wurden als *Ohne Richtung* (OR) kodiert, bzw. als *Keine Kodierung* (KK), für Einlesen, Rückfragen und Niederschreiben. Um kodierte Prozesse miteinander vergleichen zu können, musste ein Darstellungsmittel gefunden werden, das die kodierten Arbeitsrichtungen sowohl hinsichtlich ihrer zeitlichen Dauer als auch ihrer Reihenfolge angemessen wiedergibt – die *2D-Bänder*: VA und RA werden farblich und mit 45° -Steigung bzw. -Neigung dargestellt (Bsp. s.u.).

Typ	Kürzel	Anzahl	Erfolgsquote
Plandurchführer, barrierefrei.	PDF	5	100%
Plandurchführer, Barriere überwunden.	PDÜ	6	85,8%
Plandurchführer mit Scheitern.	PDS	12	44,1%
Planentwickler. mit Scheitern.	PES	8	39,3%
Ohne Plan.	OP	1	0

Tab. 1: Typen mit Kürzeln, Anzahlen und empirischen Erfolgsquoten (die niedrige OP-Anzahl beruht auf der positiv-verzerrenden, selektiven Auswahl von untersuchten Probanden)

Zu Frage 1) – Die Typisierung der 2D-Bänder

Zunächst entstanden innerhalb eines induktiv-deduktiven Wechselspiels Bandtypen anhand der Bandgestalt; diese wurden unter Rückgriff auf Pólyas Phasen (*Aufgabe verstehen, Plan entwickeln, Plan durchführen, Rückschau*) und die Möglichkeiten des Umgangs mit Barrieren (*aufgeben, scheitern, ignorieren, überwinden, umgehen*) theoretisch durchgeformt. Die Probanden wurden von zwei Ratern eingeteilt (Interrater-Reliabilität: 91%).

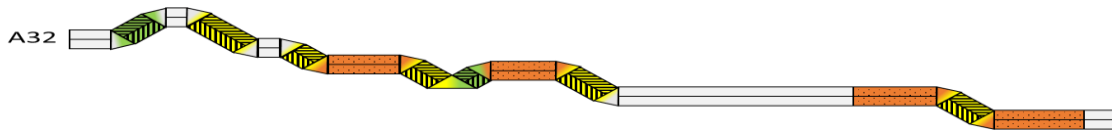


Abb. 3: Das 2D-Band von A32

Zu Frage 2) – Prognostische Validierung der Typisierung

Sind die Typen nicht nur gestaltlich, sondern auch inhaltlich geprägt, sollten sie unterschiedlichen Lösungserfolg aufweisen: PDF = PDÜ > PDS > PES > OP. Diese Hypothese bestätigte sich (prima facie durch die Erfolgsquoten, statistisch per U-Test) doch zeigt sich, dass die Typen PDS und PES so nicht zu unterscheiden sind. Ausschlaggebend hierfür sind Probanden wie A32: Optisch gehört sein 2D-Band (s.o.) zum Typ PES – inhaltlich ist sein Prozess jedoch vom Typ PDS, da A32 sehr früh einen fast vollständigen Lösungsplan entwirft und den Rest der Zeit erfolglos versucht, die enthaltene Durchführungsbarriere zu überwinden. Eine Vorhersage, woran ein Proband scheitert, ist somit nicht möglich. Die signifikante Unterscheidung zu PDF und PDÜ zeigt jedoch, dass ein Scheitern als solches gut erkennbar ist. Derartige Beobachtungen führten zu differenzierteren Fragen:

2*) Bei welchem Lösungsweg ist an welcher Stelle welche Arbeitsrichtung erfolgversprechender?

3*) Welche Arbeitsweise führt beim Problemlösen ggf. eher zum Erfolg?

2*) Das Ergebnis der Analyse in Abb. 4 (Details siehe Langfassung)

- 22 von 24 Probanden treten in die Planentwicklung ein,
- 7 von diesen 22 beginnen mit VA – davon *fast alle* (6) erfolgreich,
- Die restlichen 15 versuchen Planentwicklung mittels RA,
- 8 der 15 Probanden erreichen sämtliche benötigten Lösungselemente
- 4 von ihnen bleiben dabei stets beim RA – und scheitern *alle*,
- 4 andere wechseln an der Barriere zum VA – und nur *einer* scheitert!

Diese Ergebnisse besagen: Die Vorwärtsarbeiter sind vermutlich Probanden, die 3 Monate zuvor bei Erstbearbeitung der Aufgabe K10 ein Schema

zum Lösen dieser Aufgabe aufbauen konnten, welches sie nun aus der Erinnerung reaktivieren. Die anderen Probanden besitzen kein solches Schema oder vermögen nicht, sich daran zu erinnern, so dass sie erneut Problemlösen betreiben müssen. Entsprechend Pólyas Empfehlung für den Fall, dass einem die Aufgabe nicht geläufig ist, beginnen sie alle mit RA – doch sind sie deutlich weniger erfolgreich, wenn sie dabei bleiben!

Den Rückwärtsarbeitern passiert genau das, was Pólya als Verfangen in einer nicht lösbaren Teilaufgabe beschreibt: Sie sind zu sehr auf den Wunsch α und/oder β einzeln zu berechnen fokussiert, als dass ihnen der Anschauungswechsel von der Geometrie in die Algebra gelingt. Bei den Probanden, die ihre Richtung wechseln, lässt sich hingegen Dörners prognostizierte Einschränkung des Suchraums und Zielfokussierung vermuten. Zudem schafft die Bearbeitung von beiden Seiten „Material für die Prozedur des Zielwechsels“: Durch die unabhängige Betrachtung von $|\alpha| + |\beta| = 90^\circ$ und dem Wunsch α und β zu berechnen, liegen diese Winkel nicht mehr nur einzeln im Fokus, sondern können leichter kombiniert werden. Der Richtungswechsel an der Barriere führte bei 75% der Probanden zum Erfolg – und der Verbleib im RA bei 100% zum Scheitern!

Weiteres in der Langfassung:
www.idmp.uni-hannover.de/downloads.html

Literatur

Dörner, D. (1979): Kognitive Merkmale erfolgreicher und erfolgloser Problemlöser beim Umgang mit sehr komplexen Systemen. In: Komplexe menschliche Informationsverarbeitung. Bern: Huber.

Gawlick, Th. (2014): Über Aufgaben-, Prozess- und Problemlösetypen bei K10. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 403-406. Münster: WTM

Pólya, G. (1967): Vom Lösen mathematischer Aufgaben. Einsicht und Entdeckung, Lernen und Lehren. Band 1 und Band 2. Basel: Birkhäuser.

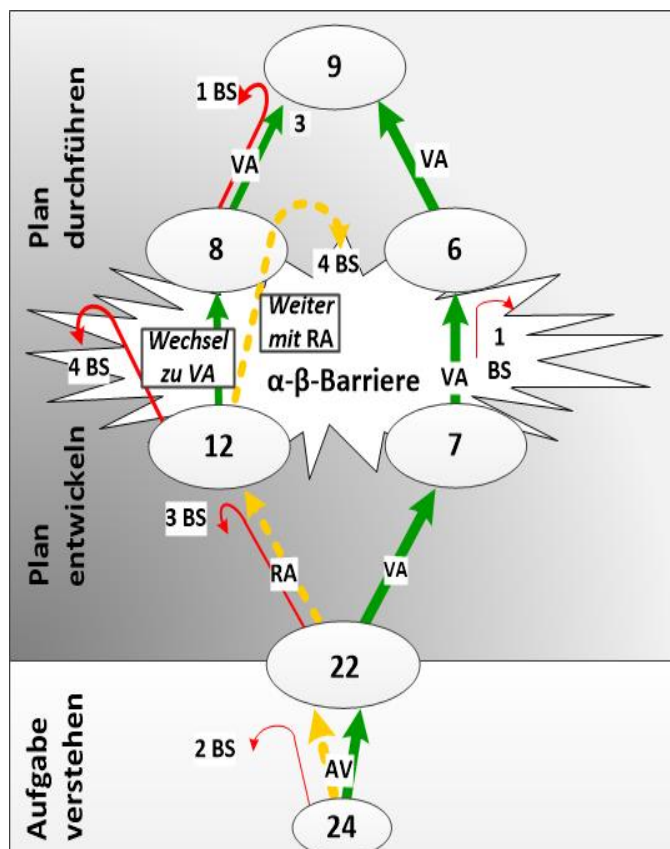


Abb. 4: Arbeitsweise und differentieller Erfolg bei K10