

Neue Aufgaben in alten Schläuchen: Wie die Fachwissenschaft zusammen mit der Hochschul- mathematikdidaktik zu neuen Aufgabenformaten kommt

Die zur universitären Mathematik zugehörige Hochschulmathematikdidaktik beschäftigt sich mit spezifischen Fragen rund um die Vermittlung der Mathematik im tertiären Bildungsbereich. Sie bildet daher eine Synthese aus dem reichhaltigen Erfahrungsschatz der (originär auf die Schulmathematik bezogenen) Mathematikdidaktik und der fachspezifischen Kultur der universitären Mathematik. In diesem aufstrebenden Feld will dieser Beitrag exemplarisch ausloten, inwiefern die Hochschulmathematik einerseits bereits (unwissentlich) didaktische Methoden einsetzt und andererseits zugleich von der konkreten Umsetzung erprobter didaktischer Konzepte profitieren kann. Die hierbei gezeigten Aufgaben stammen aus der hochschulmathematikdidaktischen Vorlesung „Entstehungsprozesse von Mathematik“ der Goethe Universität Frankfurt. Der Fokus dieser Aufgaben liegt auf der Vermittlung mathematischer Arbeitsweisen sowie auf der authentischen Entdeckung der Fachmathematik.

Offenheit von Aufgaben – (auch) in der Hochschulmathematik

Bei Bruder (2000) findet sich das in der Didaktik bekannte Klassifikationschema zur *Offenheit von Aufgaben*: Dieses charakterisiert Aufgaben danach, ob Lernenden jeweils der Start, der Weg und das Ziel bekannt (\times) oder unbekannt ($-$) sind. Die sich daraus ergebenden acht möglichen Typen von Aufgaben sind als *Beispielaufgabe*, *geschlossene Aufgabe*, *Begründungsaufgabe*, *Umkehraufgabe*, *Problemaufgabe*, *Problemumkehr*, *Anwendungssuche* und *offene Situation* bekannt (vgl. Büchter & Leuders 2014). Betrachten wir nun, in welcher Form diese Aufgaben im tertiären Bereich vorkommen:

- Beispielaufgaben ($\times \times \times$):
Diese finden sich i. d. R. in Vorlesungen, beispielsweise wenn Beweise von Sätzen vorgeführt werden, aber auch in der Fachliteratur.
- geschlossene Aufgaben ($\times \times -$):
z. B. Anwenden eines Verfahrens
- Begründungsaufgaben ($\times - \times$):
zu beweisenden Implikationen, bei denen eine Vermutung vorliegt
- Umkehraufgaben ($- \times \times$):
Suche nach Beispielen, mit bestimmten, vorgegebenen Eigenschaften

- Problemaufgaben ($\times - -$):
u. a. Existenzfragen (bei denen nicht klar ist, ob ein Objekt überhaupt existiert); oder Aussagen, zu denen keine Vermutung vorhanden ist.
- Problemumkehraufgaben ($- - \times$):
Beispiele mit ungewisser Existenz suchen („Finde, wenn möglich, ...“)
- Anwendungssuche ($- \times -$):
typisch mathematische Arbeitsweise: Wenn man eine neues Verfahren gefunden/kennengelernt hat, möchte man weitere Anwendungsgebiete finden oder dessen Grenzen ausloten, z. B. „Finde weitere Aussagen, die sich mit vollständiger Induktion beweisen lassen.“
- offene Situationen ($- - -$):
Ebenfalls typisch für das mathematische Arbeiten (beispielsweise bei der Definition eines neuen Begriffs).

Zunächst mag auffallen, dass alle diese Aufgabentypen in irgendeiner Weise charakteristisch für die Mathematik sind – wenngleich manche Typen in der fachmathematischen Lehre weniger weit verbreitet sind als andere. Heinrich Winter forderte ein authentisches Erleben charakteristischer Arbeitsweisen und führte in diesem Kontext aus: „*Definitionen müssen [...] im Kontext von Problemstellungen erarbeitet, nachentdeckt werden [...]. Wichtige Aktivitäten sind dabei: untersuchen, inwieweit die charakterisierenden Eigenschaften eindeutig sind; untersuchen, auf Unter- und Überbestimmtheit; untersuchen, ob zwei konkurrierende Formulierungen dasselbe sagen; weitere äquivalente Formulierungen finden; eine Definition abwandeln und die Auswirkungen davon beobachten, usw.*“ (Winter 1983, S. 193–194)

Bei der Anwendung des vorgestellten Klassifikationsschemas auf die Aufgaben der Hochschulmathematik sind einzelne Dinge zu beachten: So fällt zunächst (wie auch bei den Aufgaben aus dem Mathematikunterricht) die Klassifikation im Einzelfall nicht ganz eindeutig aus, was sich aber für die Handhabung offener Aufgaben als nicht weiter schlimm erweist. Weiterhin kann natürlich eine mathematisch prinzipiell offene Aufgabe in der konkreten Umsetzung für die Studierenden nicht offen sein; und ebenso können offene Aufgaben von den Studierenden nicht als solche erkannt werden. Ersteres tritt auf, wenn mit den vorhandenen Kenntnissen nur einer von mehreren theoretisch vorhandenen Beweiswegen möglich ist; der zweite Fall kann entstehen, wenn die Studierenden nicht daran gewöhnt sind, bei offenen Aufgabenteilen eine eigene Entscheidungen treffen zu müssen.

Nachfolgend werden Beispiele unterschiedlich offener Aufgaben vorgestellt, die an der Goethe Universität Frankfurt entwickelt und evaluiert wurden.

Beispiele offener Aufgaben aus der Hochschulmathematikdidaktik

Betrachten wir zunächst eine geschlossene Aufgabe: Gegeben sind zwei Definitionen von Konvexität, wobei eine der Definitionen implizit eine differenzierbare Funktion voraussetzt. Unterschiedliche Funktionen sollen jeweils mit beiden Definitionen auf Konvexität untersucht werden. (Klassifikation: $\times \times -$, Ausgangssituation und Weg sind bekannt, das Ergebnis nicht.)

Offener ist eine ähnlich Begründungsaufgabe, die sich in einem ähnlichen Bereich bewegt: Weisen Sie an jeder Unstetigkeitsstelle von (einer zuvor definierten Funktion) f auf jeweils zwei unterschiedliche Arten nach, dass die Funktion dort unstetig ist. (Klassifikation $\times - \times$)

Solch eine Begründungsaufgabe lässt sich weiter öffnen, wenn den Studierenden neben der Wahl des Argumentationsweges auch das Ergebnis unbekannt ist. Beispielsweise finden sich für die Differenzierbarkeit i. d. R. drei äquivalente Formulierungen (vgl. Bauer 2013). Aus der Begründungsaufgabe wird dann eine Problemaufgabe: Wählen Sie sich eine der Differenzierbarkeitsdefinitionen und überprüfen Sie damit (eine entsprechende Funktion) f auf Differenzierbarkeit (Klassifikation $\times - -$). Noch ein Stück interessanter wird diese Problemaufgabe, wenn anschließend nach einer Begründung für die Wahl der verwendeten Definition gefragt wird.

Eine gänzlich andere Form einer Problemumkehraufgabe ist für Studierende zwar zunächst ungewohnt, trägt aber zu einem nachhaltigeren und tiefergehenden Verständnis von Sätzen bei: Man nehme als Ausgangspunkt einen (bekannten und bewiesenen) Satz, zum Beispiel den Mittelwertsatz der Differentialrechnung und überprüfe die dort stehenden Voraussetzungen – Stetigkeit auf $[a, b]$, Diff'barkeit auf (a, b) sowie $a < b$ – auf ihre Notwendigkeit. Wenn eine Voraussetzung dort nicht nur aus pragmatischen Gründen steht – was auch vorkommen kann –, muss zugleich noch ein elementares Gegenbeispiel generiert werden, welches überzeugend beweist, dass der Satz in seiner reduzierten Form nicht mehr gültig wäre. Als Beispiel: Verzichtete man beim Mittelwertsatz auf die Differenzierbarkeit, so ist die Betragsfunktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ein einfaches Beispiel, bei dem kein $\xi \in (-1, 1)$ mit $f'(\xi) = 0$ existiert.

Ausblick: Funktionen & Phasen von Aufgaben in der Hochschullehre

Nach Büchter & Leuders (2014) sind mit dem Einsatz von Aufgaben in unterschiedlichen Unterrichtsphasen auch jeweils zugehörige Ziele verbunden. So unterstützen Aufgaben einerseits den Beginn des Wissenserwerbs, werden aber zugleich auch am Ende in Prüfungssituationen eingesetzt. Innerhalb dieser beiden Phasen lassen sich die folgenden Funktionen identifizieren:

Beim Lernen dienen Aufgaben dem *Erkunden*, dem *Sichern und Systematisieren* sowie dem *Üben*; hingegen werden Aufgaben in Leistungssituationen zum *Diagnostizieren* und zum *Bewerten* eingesetzt.

Abschließend betrachten wir drei Aufgabenstellungen zum Sichern, zum Üben und zur verstehensorientierten Diagnose:

Werden Aufgaben bearbeitet, bei denen die Studierenden eigentätig Inhalte erzeugen, so entstehen ggfs. unterschiedliche Fassungen ein und desselben mathematischen Begriffs (vgl. Oldenburg & Weygandt 2015). Hierdurch kommt den Tätigkeiten des *Vergleichens und Systematisierens* eine bedeutendere Rolle zu: Die Studierenden können in solchen Situationen aufgefordert werden, sich in Form von Gutachten zu den Vor- und Nachteilen der unterschiedlichen Definitionen zu äußern.

Beispiel einer operativen Übungs-Aufgabe: Betrachten Sie Ihre eigenen Vierecks-Definitionen. Tauschen Sie sich in Kleingruppen aus und gehen Sie folgenden Fragen auf den Grund: Definieren alle Definitionen in Ihrer Gruppe wirklich denselben Begriff? Sammeln Sie in Ihrer Gruppe „allgemeine Vierecke“ (also Beispiele, die von allen Definitionen auch als Viereck erkannt werden) und anschließend (sofern dies möglich ist) für jede der Definitionen „spezielle Vierecke“, also Beispiele, die in möglichst vielen anderen Definitionen nicht enthalten sind.

Um *Diagnoseaufgaben* zu erhalten, kann die Generierung von Gegenbeispielen umgekehrt werden. Während sonst häufig zu einer falschen Aussage ein Beispiel gesucht wird, ist dieses nun bekannt; und die Studierenden müssen eine falsche Aussage erfinden, die durch dieses Gegenbeispiel widerlegt wird. Die Folge $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, eine mögliche falsche Aussage wäre: „Jede beschränkte Folge ist konvergent.“; und zu $|x|$ passt die durch sie widerlegbare Aussage, stetige Funktionen seien differenzierbar.

Literatur

- Bauer, T. (2013). *Analysis – Arbeitsbuch*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.
- Bruder, R. (2000). Eine akzentuierte Aufgabenauswahl und Vermitteln heuristischer Erfahrung – Wege zu einem anspruchsvollen Mathematikunterricht für alle. In W. Herget & L. Flade (Eds.), *Mathematik lehren und lernen nach TIMSS: Anregungen für die Sekundarstufen*. Berlin: Volk und Wissen, 69–78.
- Büchter, A. & Leuders, T. (2014). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln: Lernen fördern – Leistung überprüfen* (6. Aufl.). Berlin: Cornelsen.
- Oldenburg, R. & Weygandt, B. (2015). Stille Begriffe sind tief: Ideen zur Schulung eines kritischen Begriffsverständnisses in der Analysis. *Der Mathematikunterricht*, 61(4), 39–50.
- Winter, H. (1983). Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 4(3), 175–204.