Wieland WILZEK, Essen

Interaktive dynamische Visualisierungen als optionales Unterstützungsangebot im fachmathematischen Studium – Untersuchung von Wirkungen auf das Begriffsverständnis und die Art Beweise zu führen

Aufgrund der hohen Abbruchquoten in den mathematikhaltigen Studiengängen werden vermehrt Maßnahmen von Seiten der Hochschule etabliert, die der Übergangsproblematik von der schul- zur hochschultypischen Art des Mathematiktreibens begegnen sollen. Von den verschiedenen Facetten dieses Übergangs stellen in den fachmathematischen Studiengängen vor allem die abstrakte Begriffsbildung, der höhere Formalisierungsgrad und die strengere deduktive Beweisführung besondere Herausforderungen dar. Interaktive dynamische Visualisierungen zu zentralen Begriffen der Einstiegsvorlesungen können hier als Hilfestellung zum eigenverantwortlichen Lernen vorlesungsbegleitend bereitgestellt werden. Dabei ist bisher nicht bekannt, wie sich diese Maßnahme auf das Begriffsverständnis und die Art Beweise zu führen auswirkt.

1. Anschauung und Prototypen

Werden Visualisierungen eingesetzt, um abstrakte Begriffe zu veranschaulichen, stellt sich die Frage, welche Rolle Anschauung in der wissenschaftlichen Mathematik spielt, zu der die Studierenden im Laufe ihres Studiums hingeführt werden sollen. Volkert (1986) spricht von verschiedenen Funktionen der Anschauung:

- einer erkenntnisbegrenzenden Funktion
- einer erkenntnisleitenden Funktion
- einer erkenntnisbegründenden Funktion

Während das Erlangen mathematischer Gewissheit durch anschauliches Argumentieren (erkenntnisbegründende Funktion) tendenziell der Schulmathematik zugeordnet werden kann, ist der Gebrauch von Anschauung als Heuristik (erkenntnisleitende Funktion), etwa beim Aufstellen von Vermutungen oder bei der Findung einer Beweisidee, auch in der Hochschulmathematik anzutreffen. Diese informellen Aspekte des Mathematiktreibens werden in wissenschaftlichen Publikationen verschleiert, haben aber in gewissen Teilprozessen des Beweisvorgangs (vgl. z.B. Ableitinger, 2012) ihre Berechtigung.

Visualisierungen sind in der Regel an wenige oder an ein einzelnes Beispiel gebunden, sodass der Lernende nicht ohne Weiteres erkennen kann, welche

In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag

Eigenschaften des dargestellten Repräsentanten definierende sind, welche Eigenschaften aus den definierenden unmittelbar folgen und welche Eigenschaften rein akzidentiell sind. Die Theorie der Prototypen (Eckes, 1991) geht davon aus, dass das Begriffsverständnis durch einen typischen Vertreter des Begriffes charakterisiert ist. So werden Objekte als dem Begriff zugehörig erkannt, wenn sie dem Prototyp ähnlich sind. Die Wahl des Prototyps kann somit zu unterschiedlichen Begriffsverständnissen führen, was dem mathematischem Ideal der Begriffsbildung widerspricht. Tall und Bakar (1992) vermuten, dass Studierende ein falsches Verständnis des Funktionsbegriffs aufgrund ungünstiger Prototypen aus der Schulzeit ausgebaut haben. Visualisierungen als beispielgebundene Darstellungen könnten also bei ungünstiger Wahl der Beispiele zu Fehlvorstellungen führen.

2. Qualitative Pilotstudie

Im Wintersemester 17/18 wurde eine qualitative Pilotstudie im Rahmen der Analysis-Vorlesung durchgeführt, die von Studierenden der Fachmathematik im ersten und Studierenden des gymnasialen Lehramts im dritten Fachsemester besucht wird. Eine Gruppe von Studierenden ($n = 4$) erhielt, nachdem der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit in der Vorlesung thematisiert wurde, eine Lernaufgabe zu diesem Begriff, in die eine interaktive dynamische Visualisierung eingebunden war. Eine andere Gruppe ($n = 3$) erhielt eine vergleichbare Aufgabe mit einer statischen Visualisierung.

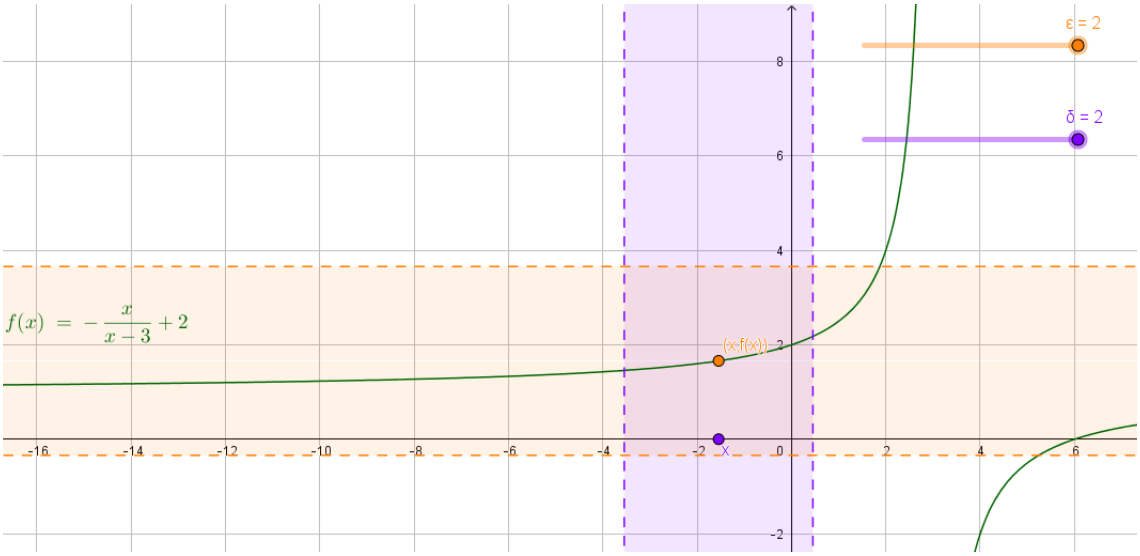

Abb. 1: dynamische interaktive Visualisierung aus der Lernaufgabe

Nach dieser kurzen Intervention hatten die ProbandInnen die Möglichkeit, das Gelernte aus der Vorlesung oder der Lernaufgabe bei der Bearbeitung des wöchentlichen Übungszettels anzuwenden. In der darauffolgenden Woche wurden die Studierende dann in einem aufgabenbasierten Interview bezüglich möglicher Auswirkungen der Maßnahme untersucht, indem sie nach den Definitionen und Vorstellungen zur punktweisen und gleichmäßigen Stetigkeit befragt wurden. Des Weiteren wurden sie angehalten, Beispiele und Gegenbeispiele anzugeben und zu begründen, wieso diese Funktionen gleichmäßig stetig sind bzw. nicht gleichmäßig stetig sind. Auch wurden die folgenden beiden Aufgaben besprochen, die auf antizipierte Fehlvorstellungen durch gebrochenrationale Funktionen als Prototypen zugeschnitten sind.

Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Nehmen Sie Stellung zu der folgenden Behauptung: f ist gleichmäßig stetig $\Leftrightarrow$ f ist beschränkt. Begründen Sie auch ihre Einschätzung.

Aufgabe: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Beweisen oder widerlegen Sie: Existiert eine Konstante $k > 0$, sodass die Abschätzung

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq k$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq y$ gilt, dann ist f gleichmäßig stetig.

Abb. 2: Aufgaben des Interviews

Die Interviews wurden transkribiert und unter verschiedenen Aspekten ausgewertet.

3. Erste Erkenntnisse

Es wurden hilfreiche Informationen zu den eingesetzten Instrumenten gewonnen, die bei der Hauptuntersuchung im Wintersemester 18/19 berücksichtigt werden können. Beispielsweise stellten sich einige Arbeitsaufträge in der Lernaufgabe als zu offen heraus, sodass nicht alle ProbandInnen die Aufgaben sinnvoll bearbeitet haben.

Bis auf Ausnahmen ließen sich sehr vielseitige concept images und fachlich tragfähige concept definitions (Tall & Vinner, 1981) zum Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit feststellen, was durch die positive Auslese bei freiwilliger Probandenrekrutierung erklärt werden kann. Hinweise auf Prototypen konnten vereinzelt identifiziert werden, etwa bei der Äußerung „das darf nicht abhauen“, die auf die Fehlvorstellung *gleichmäßige Stetigkeit impliziert Beschränktheit* hindeutet, die durch gebrochenrationale Funktionen als Prototyp nahelegt werden können.

In den Beweisprozessen der Studierenden konnte eine Mischung aus anschaulichem und formalem Vorgehen beobachtet werden. Häufig wurde bei der Suche nach Argumenten mehrfach angesetzt und bemerkenswerterweise war bei der zweiten der oben abgebildeten Aufgaben (s. Abb. 2) der letzte Ansatz stets eine formale Herangehensweise.

Die folgenden Fallbeispiele, bei denen es um die Begründung für die gleichmäßige Stetigkeit von $f(x) = x$ geht, machen deutlich, wie dieselbe Argumentation anschaulich oder formal geführt werden kann:

ProbandIn 7: „Ja, die Steigung ist überall eins, man kann ein Epsilon und ein Delta wählen und das ist in, das kann man quasi überall hinsetzen, so."

ProbandIn 6: „Dann ist ja f von x minus f von y gleich x minus y und dann wähle ich einfach Delta wie mein Epsilon und dass passt das."

Während die erste Äußerung auf ein anschaulich-dynamisches Vorgehen im Sinne der Rechteckstreifenvorstellung wie in der Lernaufgabe hinweist, handelt es sich bei der zweiten Äußerung um ein formales Argument, das ohne Weiteres symbolisch umgesetzt werden könnte. Interessant wird ein genauerer Blick auf das Zusammenspiel der anschaulichen und formalen Ebene in den Beweisprozessen sein, sodass im Zuge des qualitativen Forschungsparadigmas die Forschungsfrage auf diesen Aspekt eingeengt werden soll.

4. Fazit

In allen Interviews ließ sich eine Mischung aus anschaulichen und formalen Vorgehen feststellen, wobei die Anschauung sowohl zur Hypothesenbildung als auch zur Beweisideenfindung verwendet wurde. Eine formale Absicherung wurde aber stets angestrebt, sodass man von dem Gebrauch einer *kritischen* Anschauung sprechen kann. Für die Hauptuntersuchung soll die Stichprobe (auch unter Einbezug weiterer Standorte) vergrößert und Studierende unterschiedlicher Leistungsstärke miteinbezogen werden.

Literatur

Ableitinger, C. (2012). Typische Teilprozesse beim Lösen hochschulmathematischer Aufgaben. Kategorienbildung und Ankerbeispiele. *Journal für Mathematik-Didaktik, 33* (1), 87–111. https://doi.org/10.1007/s13138-012-0033-y

Eckes, T. (op. 1991). Psychologie der Begriffe. Strukturen des Wissens und Prozesse der Kategorisierung. Göttingen: Hogrefe.

Tall, D. & Bakar, Md., Nor. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23* (1), 39–50.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* (2), 151–169.

Volkert, K. T. (1986). *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*. Zugl.: Saarbrücken, Univ., Diss. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.