

**Analyse von Wellenpaketen in der
periodischen nichtlinearen
Schrödingergleichung durch Approximation
mittels Coupled Mode Gleichungen**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
(Dr. rer. nat.)

eingereicht an der
Fakultät für Mathematik der
Technischen Universität Dortmund

von
M.SC. LISA WAHLERS
GEB. HELFMEIER

Dortmund, Oktober 2018

Dissertation

Analyse von Wellenpaketen in der periodischen nichtlinearen Schrödingergleichung durch Approximation mittels Coupled Mode Gleichungen

Fakultät für Mathematik

Technische Universität Dortmund

Erstgutachter: Prof. Dr. T. Dohnal

Zweitgutachter: Prof. Dr. B. Schweizer

Tag der mündlichen Prüfung: 14.12.2018

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei den Menschen bedanken, die mich auf unterschiedlichste Weise bei der Anfertigung meiner Doktorarbeit unterstützt haben.

Als Erstes möchte ich meinem Betreuer Prof. Tomáš Dohnal danken, dass er mir die Chance zur Promotion gegeben hat und in den letzten Jahren nicht müde wurde, mir alle meine Fragen zu beantworten.

Außerdem bedanke ich mich bei der Gruppe um den Lehrstuhl I und der Biomathe AG der TU Dortmund für die herzliche Aufnahme, die tolle Stimmung und die inspirierende Atmosphäre. Insbesondere danke ich meinen Kollegen Sven Badke, Nils Dabrock, Elena El Behi-Gornostaeva, Peter Furlan, Stephan Hausberg, Patrick Mrozek, Klaas Poelstra, Maik Urban und Carsten Zwilling für die mathematischen und die nichtmathematischen Diskussionen in dieser Zeit.

Ich danke meinen Eltern Hans-Jürgen und Elisabeth für ihre Unterstützung seit Kindes-tagen, insbesondere meinem Vater für den sanften Schubs in Richtung der Mathematik, ohne den ich heute nicht an diesem Punkt wäre.

Schließlich möchte ich meinen größten Dank an meinen Mann Stefan richten, der mich in den letzten Jahren immer wieder aufgebaut hat, wenn es nötig war und der nie aufgehört hat an mich zu glauben.

Diese Arbeit ist mit der Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft entstanden, DFG grant Nr. DO1267/3-1.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einordnung in die Thematik	3
1.2	Hauptresultate und Aufbau	7
2	Mathematische Grundlagen	11
2.1	Dispersive Wellen	11
2.2	Blochtheorie und Funktionenräume	13
3	Die Coupled Mode Gleichungen	23
3.1	Formale Herleitung der Coupled Mode Gleichungen in 1D	23
3.2	Die Coupled Mode Gleichungen in höheren Dimensionen	29
3.3	Wohlgestelltheit der Coupled Mode Gleichungen	31
4	Untersuchung der Dispersionsrelation für die Coupled Mode Gleichungen in 2D	37
4.1	Struktur der Coupled Mode Gleichungen in 2D	37
4.2	Existenz einer spektralen Lücke für die Coupled Mode Gleichungen in 2D	48
5	Lokalisierte Lösungen der Coupled Mode Gleichungen in 2D	53
5.1	Asymptotik	53
5.2	Numerische Suche nach lokalisierten Lösungen der Coupled Mode Gleichungen	56
5.3	Existenz einer lokalisierten Solitärwelle für die Coupled Mode Gleichungen	62
5.4	Bewegliche Lösungen in höheren Dimensionen	80
6	Approximation der periodischen nichtlinearen Schrödingergleichung in höheren Dimensionen durch die Coupled Mode Gleichungen	83
6.1	Konstruktion des erweiterten Ansatzes	86
6.2	Abschätzung des Residuums	90
6.3	Der asymptotische Fehler	102
7	Zusammenfassung und Ausblick	109
	Anhang	111
	Literaturverzeichnis	118

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der mathematischen Analyse der Ausbreitung von lokalisierten Wellenpaketen in nichtlinearen Medien mit periodischer Struktur. Ein interessantes Beispiel dafür sind optische Impulse wie Licht in einem photonischen Kristall, denn Licht durchläuft einen photonischen Kristall im mathematischen Sinne wellenartig. Dieses Beispiel findet unter anderem Anwendung in der Datenübertragung.

Ein photonischer Kristall ist die räumlich periodische Anordnung dielektrischer Materialien mit unterschiedlichem Brechungsindex. Der einfachste mögliche Fall eines photonischen Kristalls besteht aus abwechselnden Schichten von zwei Materialien mit unterschiedlichen dielektrischen Konstanten, siehe Abbildung 1.1. Eine detaillierte Einführung in das Gebiet von photonischen Kristallen wird in [JMW95] gegeben.

Wir werden in dieser Arbeit Wellen in periodischen Strukturen in 1D, 2D und höheren Raumdimensionen betrachten.

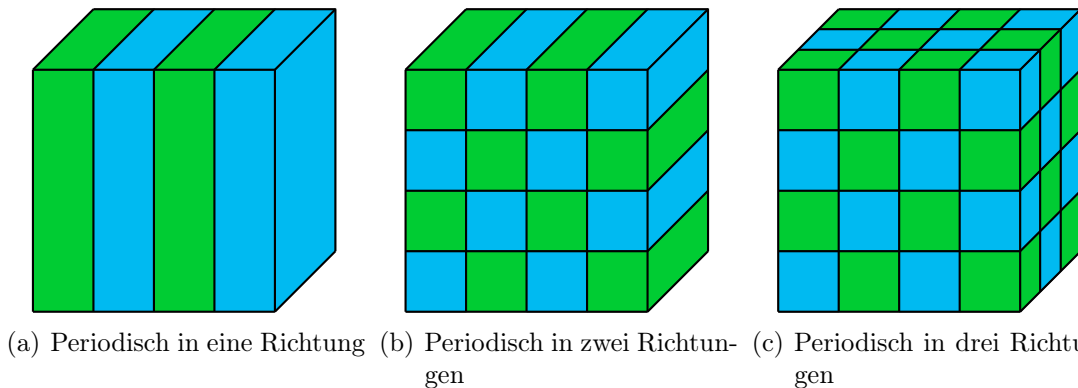


Abbildung 1.1: Einfaches Beispiel für Periodizität in ein, zwei und drei Richtungen in 3D. Die unterschiedlichen Farben repräsentieren verschiedene Materialien mit unterschiedlichen dielektrischen Konstanten.

Eine besondere Art von Wellen sind die sogenannten *Solitärwellen*. Eine stehende Solitärwelle $\phi e^{-i\omega t}$ entsteht durch die Balance zwischen nichtlinearen und dispersiven Effekten und bewegt sich mit stabiler Form fort, welche sich über große Distanzen nicht ändert. Andere Arten von Wellen würden zum Beispiel mit der Zeit abflachen, steiler werden oder überkippen. Weiter erfüllen Solitärwellen die Eigenschaft, dass $|\phi(x)|$ weg von der Null exponentiell abflacht. Das heißt, die Einhüllende der Welle hat einen globalen Peak und fällt weit weg vom Peak ab.

Ein spezieller Fall von Impulsen in periodischen Strukturen sind die sogenannten *Gap Solitone*, welche lokalisierte zusammenhängende Wellen sind, deren Frequenz innerhalb einer

Lücke des korrespondierenden linearen räumlichen Spektralproblems liegt. In vielen Fällen existieren Gap Solitone in Familien, die durch Geschwindigkeit parametrisiert sind, so dass die Geschwindigkeit für eine fixierte Frequenz variiert werden kann. Gap Solitone können für optische Netzwerke genutzt werden, zum Beispiel im Bereich von optischer Logik oder optischen Switches [BTR98, SH07].

Gap Solitone sind keine echten Solitone, da sie beim Zusammenprall keine elastische Interaktion aufweisen. Zwei sich gegensätzlich bewegliche Solitone laufen durcheinander hindurch und behalten während dieses Vorgangs ihre Form. Solitärwellen und Gap Solitone hingegen besitzen diese Eigenschaft nicht, da sie sich bei Kollision leicht in der Amplitude ändern und ein oszillierender Rest übrig bleibt. Weiterführende Grundlagen zu Solitärwellen und Gap Solitonen in periodischen nichtlinearen Medien sind beispielsweise in [AW89] beschrieben.

Eine Reihe physikalischer Phänomene wird mathematisch durch partielle Differentialgleichungen beschrieben. Das Konzept von photonischen Kristallen wurde 1864 von J.C. Maxwell eingeführt [Max64]. Die Modellierung des Vorgangs von Licht im photonischen Kristall führt von den Maxwell Gleichungen über die Darstellung als lineares hermitesches Eigenwertproblem zur *periodischen nichtlinearen Schrödingergleichung* (PNLS)

$$i\partial_t u + \Delta u - Vu - \sigma|u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, V, \sigma \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}). \quad (1.1)$$

Unser Ziel liegt darin, die Asymptotik von Wellenpaketen mit N Trägerwellen für (1.1) innerhalb nichtlinearer periodischer Strukturen zu erforschen. Dafür nutzen wir einen formalen Ansatz aus langsam variierenden Einhüllenden von kleinen und breiten Wellenpaketen, siehe Abbildung 1.2. Diese Einhüllenden erfüllen ein System aus Amplitudengleichungen, eine Art verallgemeinerte *Coupled Mode Gleichungen* (CMG). Für die Coupled Mode Gleichungen suchen wir Gap Solitone, um eine approximative Solitärwelle für (1.1) zu finden. Die Analysis ist aufgrund der konstanten Koeffizienten für die Coupled Mode Gleichungen einfacher zu handhaben als für die ursprüngliche Gleichung (1.1).

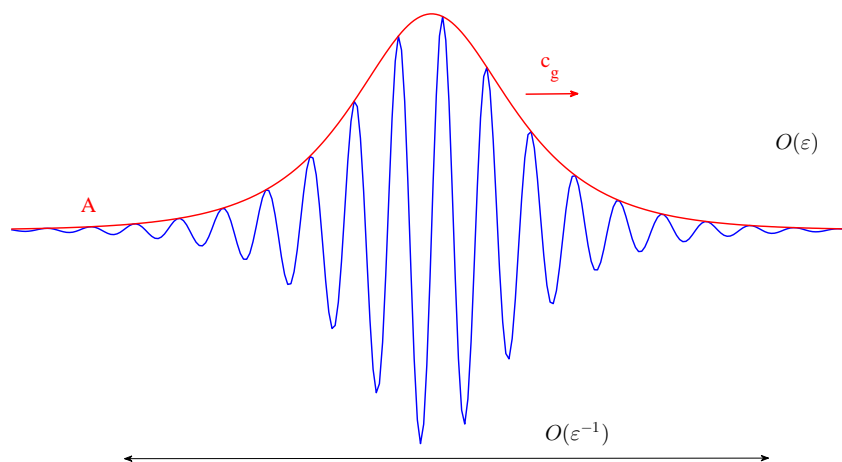


Abbildung 1.2: Räumlich breites Wellenpaket mit kleiner Amplitude. Es bezeichnet A die Einhüllende und c_g die Gruppengeschwindigkeit.

1.1 Einordnung in die Thematik

1) Probleme mit konstanten Koeffizienten

Die Bewegung von Wellen erfahren wir im täglichen Leben, zum Beispiel in Form von Wasserwellen oder der Ausbreitung von Licht und Ton. Es gibt eine Reihe von mathematischen Konzepten, um diese Phänomene in der Theorie zu verstehen und Probleme zu lösen, die aus solchen Vorgängen resultieren.

Bei der Bewegung von Wellen unterscheiden wir zwei Kategorien. Zum einen gibt es die sogenannten *hyperbolischen Wellen*. Dies sind Wellen, die durch eine hyperbolische partielle Differentialgleichung beschrieben werden. Prototypen für hyperbolische Wellen auf \mathbb{R}^d sind die Wellengleichung $\varphi_{tt} = c_0^2 \Delta \varphi$, $c_0 \in \mathbb{R}$ mit dem Laplaceoperator $\Delta = \partial_{x_1}^2 + \dots + \partial_{x_d}^2$ in d Dimensionen oder auch die Transportgleichung $\varphi_t + c_0 \nabla \varphi = 0$, $c_0 \in \mathbb{R}$.

Auf der anderen Seite gibt es die sogenannten *dispersiven Wellen*, welche durch die Form ihrer Lösung charakterisiert sind [Whi74]. Obwohl wir uns in der vorliegenden Arbeit vorrangig mit nichtlinearen Wellen beschäftigen, bildet die lineare Wellentheorie eine wichtige Grundlage für unsere Untersuchungen. Für lineare Probleme mit konstanten Koeffizienten werden disperse Wellen üblicherweise durch die Existenz einer elementaren Lösung in der Form einer sinusodialen Welle

$$\varphi = Ae^{i(k \cdot x - \omega t)} \quad (1.2)$$

verstanden, wobei A die *Amplitude*, die *Frequenz* ω eine reellwertige Funktion des *Wellenvektors* k ist und im Allgemeinen gilt, dass $A \in \mathbb{C}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Die Funktion $\omega = W(k)$ mit $W : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, welche k und ω in Relation zueinander setzt, heißt *Dispersionsrelation*. Im Allgemeinen gibt es mehrere Lösungen mit unterschiedlichen Funktionen $W(k)$. Wir werden diese im Folgenden als *Moden* bezeichnen, siehe [Whi74]. Dispersive Systeme besitzen die Eigenschaft, dass die Determinante der Hessematrix von W ungleich Null ist und dass das zugehörige $W(k)$ reellwertig ist.

Es gibt Fälle, in denen sich beide Arten von Wellen überschneiden. Das heißt, es gibt hyperbolische Gleichungen, die eine Lösung der Form (1.2) mit nichttrivialer Dispersionsrelation $\omega = \omega(k)$ haben, in dem Sinne, dass die Phasengeschwindigkeit nicht für alle k gleich ist und wirklich Dispersion auftritt. Ein Beispiel dafür ist die Klein-Gordon Gleichung $\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \varphi = 0$, denn die Dispersionsrelation lautet $\omega = \sqrt{k^2 + 1}$ und damit ist offensichtlich $\omega'' \neq 0$.

Allgemeinere Lösungen bestehen aus der Überlagerung mehrerer Moden der Form (1.2) mit unterschiedlichen Wellenzahlen k . Wenn die Phasengeschwindigkeit nicht für alle k gleich ist, so bewegen sich die Moden zu den unterschiedlichen Wellenvektoren k mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten. Das nennt man *Dispersion*. Wir benötigen die Bedingung, dass $k \mapsto \nabla \omega(k)$ nicht konstant ist, damit die Gleichung dispersiv ist. Wenn nämlich $\omega(k) = c_0 k$ mit einer Konstante c_0 ist, so ist die Phasengeschwindigkeit für alle k gleich und die Moden mit unterschiedlichen k breiten sich alle mit derselben Geschwindigkeit aus.

Der hauptsächliche Effekt der Nichtlinearität bei dispersiven Gleichungen ist das Auftreten einer Amplitudenabhängigkeit in der Dispersionsrelation. Eine weitere spezifische Konsequenz der nichtlinearen Form ist die Existenz von solitären Wellen. Wellen mit diesem Profil würden in der linearen Theorie zerlaufen, doch in einigen Fällen balanciert die Nichtlinearität die Dispersion aus, so dass Wellen von beständiger Form produziert werden können.

Die nichtlineare Schrödingergleichung $i\varphi_t + \Delta\varphi + |\varphi|^2\varphi = 0$ gehört zu der Klasse der nichtlinearen dispersiven Gleichungen, denn die Dispersionsrelation zum linearen Problem lautet $\omega = |k|^2$ und deren Hessische sind nicht Null.

2) Probleme mit räumlich periodischen Koeffizienten

Wir betrachten das Anfangswertproblem für die verallgemeinerte nichtlineare Schrödingergleichung

$$\begin{aligned} i\partial_t u &= -\Delta u + V(x)u + f(|u|^2)u \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

wobei $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ eine Wellenfunktion ist. Weiter ist $V(x)$ ein beschränktes Potential und f ist eine reelle analytische Funktion. Für dieses Anfangswertproblem wurde in [Pel11] für $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ die Existenz einer eindeutigen lokalen Lösung $u(t)$ gezeigt.

Wie wir später sehen werden, führt der *Schrödinger Operator* $L := -\Delta + V$ zum sogenannten *Blocheigenwertproblem*. Für ein Problem mit periodischen Koeffizienten erhalten wir durch das Blocheigenwertproblem die Eigenwerte $\omega_n(k)$. Das ursprüngliche Problem ist dispersiv, wenn gilt, dass $\det(D^2\omega(k)) \neq 0$.

Wie wir später sehen werden, führt der *Schrödinger Operator* $L := -\Delta + V$ zum sogenannten *Blocheigenwertproblem*. Für ein Problem mit periodischen Koeffizienten erhalten wir durch das Blocheigenwertproblem die Eigenwerte $\omega_n(k)$. Das ursprüngliche Problem ist dispersiv, wenn gilt, dass $\det(D^2\omega(k)) \neq 0$.

In der vorliegenden Arbeit interessieren wir uns für Wellenpakete in nichtlinearen Problemen mit periodischen Koeffizienten, welche durch eine sogenannte langsam variierende *Einhüllendenapproximation* untersucht werden können. Der Einhüllendenansatz wird genutzt, um eine Gleichung wie die Wellengleichung mit quadratischer oder kubischer Nichtlinearität oder die periodische nichtlineare Schrödingergleichung zu approximieren.

Wir nutzen sie in der vorliegenden Arbeit für die Rechtfertigung der effektiven Gleichungen für die periodische nichtlineare Schrödingergleichung. Durch die Wahl eines geeigneten Ansatzes möchten wir eine Approximation der Lösung erhalten, deren Fehler möglichst klein sein soll. Dafür wählen wir den approximativen Ansatz basierend auf einer Blochwelle als Lösung des linearisierten Problems. Die Welle wird mit einer kleinen und breiten Einhüllenden mit langsamer Modulation in Raum und Zeit multipliziert.

Durch das Einsetzen des Ansatzes in die ursprüngliche Gleichung erhalten wir das Residuum. Dieser Vorgang ist aus der Multiskalenanalyse bekannt. Um ein Approximationsergebnis zu erhalten, benötigen wir ein kleines Residuum. Nach der Abschätzung des Residuums erhalten wir die finale Fehlerabschätzung durch ein Gronwallargument.

Für die Abschätzung des Residuums spielen die entsprechenden Funktionenräume eine wichtige Rolle, denn die resultierende Fehlerordnung sollte größer als die Ordnung des approximativen Ansatzes sein. Zum Beispiel wird in der klassischen NLS-Asymptotik für die Wellengleichung in 1D das Residuum in H^s abgeschätzt. In höheren Dimensionen funktioniert das nur mit einem verbesserten Ansatz. Das Problem dabei ist die Skalierungseigenschaft der L^2 -Norm

$$\|f(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \varepsilon^{-n/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

so dass bei der Abschätzung des Residuums $n/2$ ε -Potenzen verloren gehen. Deshalb wird das Residuum in höheren Dimensionen im Blochraum auf Basis von L^1 abgeschätzt. Wir

werden in unserer Rechtfertigung ebenfalls mit Blochvariablen und in L^1 arbeiten. Genaueres dazu werden wir an entsprechender Stelle erläutern.

Die Skalierung der Einhüllenden A ist nicht eindeutig und kann zu verschiedenen Amplitudensystemen mit qualitativ unterschiedlichen Lösungen führen.

Für die periodische nichtlineare Schrödingergleichung (PNLS)

$$i\partial_t u = -\Delta u + V(x)u + \sigma(x)|u|^2 u \quad (1.3)$$

mit $V, \sigma \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ $2\pi\mathbb{Z}^d$ -periodisch, wird der Ansatz aus sogenannten *Blochwellen* konstruiert. Blochwellen sind eine Art Verallgemeinerung von ebenen Wellen, welche die Trägerwellen von Lösungen der Linearisierung von (1.3) mit konstanten Koeffizienten sind. Mittels Blochtheorem folgt, dass alle beschränkten Lösungen der linearen Schrödingergleichung die Form $\Psi(x, k, t) = p(x, k)e^{i(k \cdot x - \omega t)}$ haben, wobei $p(x + 2\pi e_j, k) = p(x, k)$, $j = 1, \dots, d$ die Periodizität des Potentials V erfüllt. Die Welle $\Psi(x, k, t)$ wird Blochwelle genannt.

Für die Konstruktion eines Ansatzes gibt es standardmäßig zwei Möglichkeiten, nämlich auf der einen Seite die Verwendung von Wellenpaketen mit einer einzelnen tragenden Blochwelle und auf der anderen Seite die Konstruktion aus mehreren Blochwellen mit unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten. Die beiden Möglichkeiten unterscheiden sich durch ihre asymptotischen Skalierung.

In dem ersten Fall wird eine einzelne Blochwelle mit einer Einhüllenden multipliziert, welche von der sogenannten „*moving frame*“ Variablen $x - c_g t$ mit der Gruppengeschwindigkeit c_g abhängt und in der Zeit sehr langsam skaliert ist. Das Wellenpaket breitet sich mit einer Geschwindigkeit aus, welche asymptotisch nah an der Gruppengeschwindigkeit der tragenden Welle ist [BSTU06, GWH01, DR18]. Der Ansatz

$$u^{\text{ans}}(x, t) = \varepsilon A(\varepsilon(x - c_g t), \varepsilon^2 t) p(x, k_0) e^{i(k_0 x - \omega t)}, \quad x, t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (1.4)$$

führt in diesem Fall zur kubischen nichtlinearen Schrödingergleichung mit konstanten Koeffizienten.

In [BSTU06] wird eine Wellengleichung mit quadratischer bzw. kubischer Nichtlinearität in 1D durch einen Ansatz der Form (1.4) mit entsprechendem komplex konjugiertem Summanden approximiert. Die effektive Gleichung ist eine nichtlineare Schrödingergleichung mit konstanten Koeffizienten. Sie wird mittels Multiskalenanalysis hergeleitet und die Abschätzungen für die Rechtfertigung werden in Blochvariablen durchgeführt, wobei ein erweiterter Ansatz konstruiert wird, um das Residuum klein genug zu bekommen. Der asymptotische Fehler wird dann mittels Gronwall Lemma abgeschätzt. So werden auch wir in Kapitel 6 verfahren, wobei wir für die Abschätzungen der Strategie in [DH17] folgen und auf die L^1 -Norm zurückgreifen. Dieses Vorgehen wird später genauer erklärt. Ansatz (1.4) wurde in höheren Dimensionen in [DR18] für die Gross-Pitaevskii Gleichung (wir bezeichnen diese in der vorliegenden Arbeit als periodische nichtlineare Schrödinger Gleichung) und eine semilineare Wellengleichung untersucht.

Im zweiten Fall werden mehrere Einhüllende genutzt. Deren langsam variierende Skalierung von $(\varepsilon x, \varepsilon t)$ führt als effektive Gleichungen zu einem Amplitudensystem für die Einhüllenden, welches *Coupled Mode Gleichungen* genannt wird [AW89, SU01, GWH01, AP05, DH17, Pel11]. Die periodische nichtlineare Schrödingergleichung wurde in 1D bereits in [Pel11] und [Doh14] sowie in 2D in [DPS09] und [DU11] jedoch für andere zeitunabhängige

effektive Gleichungen diskutiert. In [DU11] wurde die Gleichung für ein nichtseparables Potential mit endlichem Kontrast untersucht. Im Gegensatz zum Fall mit separablem Potential [DPS09] muss die Herleitung der Coupled Mode Gleichungen für ein nichtseparables Potential in Blochvariablen, siehe Kapitel 2.2, durchgeführt werden. Die Zielsetzung in [Doh14] war die Untersuchung der Asymptotik von beweglichen Solitärwellen für (1.3) mit einem sogenannten finiten Bandpotential und zusätzlicher kleiner Störung $V + \varepsilon W$. Im eindimensionalen Fall hat der Ansatz die Form

$$u^{\text{ans}}(x, t) = \varepsilon^{1/2} e^{-i\omega_0 t} \left(A_+(\varepsilon x, \varepsilon t) p(x, k_0) e^{ik_0 x} + A_-(\varepsilon x, \varepsilon t) p(x, -k_0) e^{-ik_0 x} \right) \quad (1.5)$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$, wobei $p(x, \pm k_0) e^{i(\pm k_0 x - \omega_0 t)}$ zwei Blochwellen sind. Dieser Ansatz führt zu einem System aus zwei Gleichungen vom Dirac-Typ, den Coupled Mode Gleichungen. Damit Ansatz (1.5) eine approximative Solitärwelle für das ursprüngliche Problem (1.3) liefert, muss das Einhüllendenpaar (A_+, A_-) eine solitonähnliche Lösung der Coupled Mode Gleichungen sein. Der Inhalt dieser Arbeit baut auf den Untersuchungen in [Doh14] auf und weitet die Suche nach lokalisierten Lösungen der periodischen nichtlinearen Schrödingergleichung auf allgemeine Potentiale mit kleiner Störung $V + \varepsilon W$ und höhere Ortsdimensionen aus. Wir zeigen, dass eine konkrete Wahl des Potentials V wie in [Doh14] nicht notwendig für Coupled Mode Gleichungen mit einer spektralen Lücke ist.

In [AW89] wurde die Interaktion zwischen zwei gegensätzlich verlaufenden Moden eines elektromagnetischen Feldes in einem eindimensionalen periodischen nichtlinearen Medium behandelt. Für ein System aus zwei gekoppelten nichtlinearen Amplitudengleichungen, ähnlich zu unseren Coupled Mode Gleichungen, wird eine durch zwei Parameter charakterisierte Familie von nichtstationären solitonähnlichen Lösungen präsentiert. Diese Solitärwellen repräsentieren optische Wellenzüge, deren Einhüllende sich unverändert durch einen Reflektionsfilter bewegt, mit der Besonderheit, dass die mittlere Wellenlänge der Solitärwelle im Inneren der spektralen Lücke liegt.

Wir suchen lokalisierte Lösungen der Coupled Mode Gleichungen in einer spektralen Lücke, weil die linearen Lösungsmoden in spektralen Lücken exponentiell sind. In den sogenannten „tails“, das heißt den Ausläufern der nichtlinearen Lösung, überwiegen die linearen Dynamiken, da die kubische Nichtlinearität in den Ausläufern vernachlässigbar ist. Gleichung (1.3) wurde in ähnlicher Form, jedoch mit unterschiedlicher ε -Skalierung für zwei Raumdimensionen in [AS18] und für d Raumdimensionen in [GMS08] untersucht.

In [AS18] ist die zugrunde gelegte periodische Struktur ein Honigwabengitter und als effektive Gleichungen erhält man ein System aus zwei Diracgleichungen.

Der approximative Ansatz in [GMS08] führt zu einem Amplitudensystem in N Variablen. Die Abschätzungen für die approximative Lösung werden in dem ε -skalierten Sobolevraum

$$H_\varepsilon^s(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) \left| \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\varepsilon k|^2) |\hat{f}(k)|^2 dk < \infty \right. \right\}$$

durchgeführt. Für die Rechtfertigung dieser Gleichungen ist es notwendig, dass die unterschiedlichen Frequenzen ein sogenanntes *Closed Mode System* ausreichend hoher Ordnung, abhängig von der Raumdimension d , bilden. In der asymptotischen Entwicklung des Wellenpakets müssen die Autoren von [GMS08] zusätzlich mit Termen höherer Ordnung arbeiten, was in der Rechtfertigung in Kapitel 6 nicht nötig ist.

Die effektiven Gleichungen in beiden Fällen, [GMS08] und [AS18], besitzen jedenfalls kei-

ne spektrale Lücke, weshalb in diesen Fällen - im Gegensatz zu unserer Arbeit - keine lokalisierten Lösungen zu erwarten sind.

1.2 Hauptresultate und Aufbau

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die periodische nichtlineare Schrödingergleichung mit kleiner Störung εW

$$i\partial_t u = -\Delta u + (V(x) + \varepsilon W(x))u + \sigma(x)|u|^2 u, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

mit $V, \sigma \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. Das Potential W wird später spezifiziert. Unser formaler Ansatz für eine Wellenpaketlösung lautet

$$u^{\text{app}}(x, t) = \varepsilon^{1/2} e^{-i\omega_0 t} \sum_{j=1}^N A_j(\varepsilon x, \varepsilon t) p_{n_0}(x, k^{(j)}) e^{ik^{(j)} \cdot x}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1,$$

wobei $p_{n_0}(x, k^{(j)}) e^{i(k^{(j)} \cdot x - \omega_0 t)}$ für $j = 1, \dots, N$ die tragenden Blochwellen sind, siehe Abschnitt (2.2).

Kapitel 2 behandelt die für die vorliegende Arbeit notwendigen mathematischen Grundlagen. Zunächst erklären wir in Abschnitt 2.1 einige wichtige Begriffe und Zusammenhänge aus dem Bereich der dispersiven Wellen, wie zum Beispiel die Phasen- und Gruppengeschwindigkeit, sowie die Dispersionsrelation.

In Abschnitt 2.2 behandeln wir dann das Blocheigenwertproblem für den d -dimensionalen Fall. Wir erläutern das Konzept von Blochwellen, gehen auf die Bandstruktur ein und erklären die Wahl der Blochwellen für unseren asymptotischen Ansatz.

Für die spätere Analysis benötigen wir spezielle Funktionenräume, welche wir ebenso wie die Blochtransformation einführen. Weiter untersuchen wir die Abhängigkeit der Regularität der Blochfunktionen von dem Potential V .

Wir leiten in Kapitel 3 die sogenannten *Coupled Mode Gleichungen* in 1D und in kurzer Form in höheren Dimensionen her und zeigen, welche Struktur die Gleichungen für den allgemeinen d -dimensionalen Fall für einen Ansatz aus N Moden haben.

Wir werden sehen, dass die periodische nichtlineare Schrödingergleichung in 1D mit einem Ansatz der Form (1.5) für ein Potential mit kleiner Störung $V + \varepsilon W$ für geeignete W zu Coupled Mode Gleichungen führt, deren linearer Teil die Form

$$\begin{aligned} i(\partial_T A_+ + c_g \partial_X A_+) + \kappa A_- &= 0 \\ i(\partial_T A_- - c_g \partial_X A_-) + \kappa A_+ &= 0 \end{aligned}$$

mit $T = \varepsilon t$ und $X = \varepsilon x$, $\kappa > 0$ hat, so dass der resultierende räumliche Operator eine spektrale Lücke aufweist. Das liegt an der Tatsache, dass das Spektrum von $\begin{pmatrix} ic_g \partial_X & \kappa \\ \kappa & -ic_g \partial_X \end{pmatrix}$ $\mathbb{R} \setminus (-\kappa, \kappa)$ ist. In speziellen Fällen sind die Coupled Mode Gleichungen identisch zu denen für periodische Strukturen mit kleinem Kontrast, siehe [AW89, Pel11, GWH01]. Im eindimensionalen Fall kann man im Gegensatz zu höheren Dimensionen bewegliche, exponentiell lokalisierte Lösungen für die Coupled Mode Gleichungen nachweisen. Für einen Spezialfall

kann sogar explizit eine Familie von lokalisierten Lösungen angegeben werden.

Neben der Struktur der Coupled Mode Gleichungen in d Dimensionen zeigen wir deren lokale Wohlgestelltheit.

Es folgt in Kapitel 4 die Untersuchung der Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen für den zweidimensionalen Fall. Wir erläutern, welche Eigenschaften die Dispersionsrelation erfüllen muss, damit wir eine spektrale Lücke des zugehörigen räumlichen Operators erhalten und diskutieren die Existenz einer spektralen Lücke für approximative Ansätze aus zwei, drei und vier Moden.

In Kapitel 5 erläutern wir das asymptotische Vorgehen für die Konstruktion von lokalisierten Lösungen der Coupled Mode Gleichungen in 2D. Diese werden durch eine nichtlineare Schrödingergleichung mit konstanten Koeffizienten approximiert. Eines unserer Hauptziele ist es, Gap Solitone als Lösungen für die Coupled Mode Gleichungen zu finden und damit Solitärwellen für die periodische nichtlineare Schrödingergleichung zu approximieren.

Für den Fall von zwei Raumdimensionen präsentieren wir in Abschnitt 5.2 unsere numerischen Ergebnisse, welche eine stehende lokalisierte Solitärwelle für die Coupled Mode Gleichungen liefert, siehe Abbildung 1.3. Dafür erläutern wir in Kürze unser Vorgehen und erklären die verwendeten numerischen Verfahren und Algorithmen.

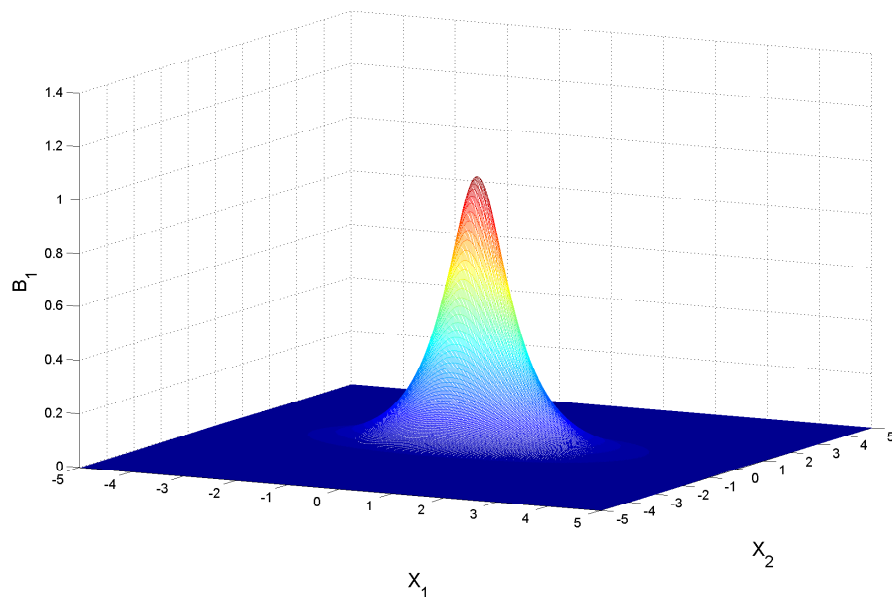


Abbildung 1.3: Zeitharmonische Lösung der Coupled Mode Gleichungen in 2D in der spektralen Lücke.

Auf Grundlage der Asymptotik beweisen wir dann in Abschnitt 5.3 die Existenz von lokalisierten Solitärwellen für die Coupled Mode Gleichungen mit Hilfe einer Lyapunov-Schmidt Reduktion und der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes. Wir formulieren das Hauptresultat

Satz 1.1. *Sei C Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung mit konstanten Koeffizienten (5.16) mit $C(X) = \overline{C(-X)}$, $\hat{C} \in L^1_{s_C}(\mathbb{R}^2)$ und $s_C \geq 1$. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $c > 0$, so dass die Coupled Mode Gleichungen (5.4) mit $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1$ für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ eine Lösung \vec{B} mit $\hat{\vec{B}} \in \mathcal{X}$ haben und es gilt*

$$\|\vec{B} - \vec{B}_{app}\|_{C_b^0} \leq c\varepsilon^{3/2}$$

und $\vec{B}(X) \rightarrow 0$ für $|X| \rightarrow \infty$. Dabei ist \vec{B}_{app} definiert durch

$$\vec{B}_{app}(X) = \varepsilon C(\varepsilon X) \vec{\eta}^{(j_0)}(0), \quad j_0 \in \{1, \dots, 4\}.$$

Eine Schwierigkeit in dem Beweis des Approximationstheorems ist, dass wir einen Operator erhalten, welcher nicht invertierbar ist. Wir schränken uns deshalb für die Lösung auf den symmetrischen Sobolevraum

$$L^1_{sym} := \{\hat{u} \in L^1_1(\mathbb{R}^2) \mid \hat{u}(\kappa) \in \mathbb{R} \ \forall \kappa \in \mathbb{R}^2, \text{supp}(\hat{u}) \subset B_{\varepsilon^{1/2}}(0)\}$$

ein und zeigen, dass der Operator dort invertierbar ist.

Wir diskutieren in Abschnitt 5.4, weshalb es im Fall von $d = 2$ Dimensionen und $N = 4$ Moden keine beweglichen lokalisierten Lösungen für die Coupled Mode Gleichungen geben kann. Dafür zeigen wir, dass die Coupled Mode Gleichungen in diesem Fall eine horizontale Asymptotik aufweisen, was für einen Ansatz mit sogenannten „moving frame“ Variablen zum Schnitt mit einer Hyperebene führt.

In Kapitel 6 führen wir schließlich eine rigorose Rechtfertigung für die periodische nichtlineare Schrödingergleichung durch. Als Hauptresultat erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 1.2. *Unter geeigneten Regularitätsannahmen an V, W und σ und für (A_1, \dots, A_N) Lösung der Coupled Mode Gleichungen (4.17) mit $\hat{A}_j \in C^1([0, T_0], L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d))$, $\partial_T \hat{A}_j \in C([0, T_0], L^1(\mathbb{R}^d))$ für ein $T_0 > 0$, $s_A > d$ und alle $j = 1, \dots, N$, existiert ein $c > 0$ und $\varepsilon_0 > 0$, so dass, falls $u(x, 0) = u^{app}(x, 0)$, gegeben durch Ansatz (1.5), so erfüllt die Lösung u von (1.6), dass $u(x, t) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ und*

$$\|u(\cdot, t) - u^{app}(\cdot, t)\|_{C_b^0} \leq c\varepsilon^{3/2} \text{ für alle } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0].$$

Dabei bezeichnet C_b^0 den Raum der stetigen und beschränkten Funktionen, versehen mit der Supremumsnorm und \hat{A}_j die Fouriertransformierte von A_j für $j = 1, \dots, N$.

Für die Rechtfertigung transformieren wir Gleichung und Ansatz in Blochvariablen und definieren einen erweiterten Ansatz, der das Residuum klein werden lässt. Das Residuum wird in einem L^1 -basierten Raum abgeschätzt, für den man mit einem Satz ähnlich zum Lemma von Riemann-Lebesgue eine Abschätzung für die C_b^0 -Norm erhält. Schließlich nutzen wir ein Gronwall Argument, um den asymptotischen Fehler zu kontrollieren.

2 Mathematische Grundlagen

Unser Ziel in diesem Kapitel liegt darin, wichtige Begriffe aus dem Bereich der dispersiven partiellen Differentialgleichungen und der Blochtheorie zu erläutern und damit eine Grundlage für die darauf folgenden Untersuchungen zu schaffen.

2.1 Dispersive Wellen

Wie in der Einleitung erwähnt, beschreibt Dispersion den Effekt, dass sich Wellen zu verschiedenen Wellenlängen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten. Als Beispiel für dispersive Wellen kann man ein Prisma betrachten, in dem Licht gebrochen wird. Durch die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Lichtwellen im Glas werden verschiedene Farben beim Übergang von Luft zu Glas und zurück unterschiedlich stark gebrochen. Auf der Seite, zu der das Licht aus dem Prisma austritt, sieht man deshalb ein farbiges Spektrum.

Für diesen Abschnitt greifen wir auf die Erläuterungen und Resultate in [Doh16] zurück.

Durch dispersive partielle Differentialgleichungen können eine Reihe physikalischer Phänomene beschrieben werden. Beispiele für dispersive Gleichungen sind die Schrödinger Gleichung

$$i\partial_t u + \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

die lineare Korteweg de Vries Gleichung

$$\partial_t u + a\partial_x u + \partial_x^3 u = 0, \quad a \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

oder die Klein Gordon Gleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u - au, \quad a \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$

Allgemein betrachten wir ein System von $m \in \mathbb{N}$ linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten auf \mathbb{R}^n

$$P(\partial_t, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}) \vec{u} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0, \quad (2.1)$$

wobei $\vec{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$ und $P : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{m \times m}$. Wir nehmen an, dass

1. $P_{j,j}(y)$ ist linear in $y_1 \quad \forall j$
2. $\partial_{y_1} P_{i,j}(y) \equiv 0 \quad \forall i, j, i \neq j$ und

$$3. \partial_{y_1} P_{j,j}(y) \neq 0 \quad \forall j.$$

Diese Annahmen stellen sicher, dass das System bezüglich t erster Ordnung ist, dass alle Gleichungen die Zeitableitung enthalten und dass in der j -ten Gleichung die Zeitableitung nur auf u_j wirkt.

Zunächst definieren wir die Dispersionsrelation, welche die Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ und den Wellenvektor $k \in \mathbb{R}^n$ in Zusammenhang bringt.

Definition 2.1. (Dispersionsrelation)

Die Dispersionsrelation von Gleichung (2.1) ist gegeben durch

$$\det(P(-i\omega, ik_1, \dots, ik_n)) = 0.$$

Bemerkung 2.2. Weil die Dispersionsrelation eine algebraische Gleichung vom Grad m ist, hat sie m Lösungen $W_1(k), \dots, W_m(k)$, die wir Moden nennen. Sie liefern m elementare Lösungen von (2.1).

Wir führen nun eine Funktion θ ein, welche die Phase der j -ten Mode der Lösung ist. Wir definieren sie als

$$\theta := k \cdot x - W_j(k)t, \quad j = 1, \dots, m$$

mit dem Wellenvektor k und der Frequenz ω_j , welche durch die Dispersionsrelation $\omega_j = W_j(k)$ gegeben ist. Die Wellenfronten $\theta = c$, $c \in \mathbb{R}$ bewegen sich mit der sogenannten Phasengeschwindigkeit fort.

Definition 2.3. (Phasengeschwindigkeit)

Die Phasengeschwindigkeit der j -ten Lösungsmode von (2.1) ist definiert durch

$$v_p^{(j)}(k) := \frac{W_j(k)k}{|k|^2}.$$

Für $d = 1$ reduziert sich die Phasengeschwindigkeit zu $v_p^{(j)}(k) := \frac{W_j(k)}{k}$. Für die Definition der Dispersion führen wir zunächst den Begriff der Gruppengeschwindigkeit ein. Das ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Einhüllende des Wellenpakets fortbewegt.

Definition 2.4. (Gruppengeschwindigkeit)

Die Gruppengeschwindigkeit der j -ten Lösungsmode von (2.1) ist definiert als

$$v_g^{(j)}(k) := \nabla W_j(k).$$

Wie in der Einleitung beschrieben, bedeutet Dispersion im Wesentlichen, dass sich Wellen zu unterschiedlichen Wellenzahlen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausbreiten.

Definition 2.5. (Dispersion)

Gleichung (2.1) ist unter Annahme 1-3 dispersiv, wenn $W_j(k) \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, wenn m linear unabhängige Lösungen $\xi^{(1)}(k), \dots, \xi^{(m)}(k) \in \mathbb{C}^m$ von

$$P(-iW_j, ik_1, \dots, ik_n)\xi^{(j)}(k) = 0$$

existieren und wenn $\det(D^2W_j) \neq 0$ für wenigstens ein j ist.

2.2 Blochtheorie und Funktionenräume

In dem folgenden Abschnitt werden wir uns mit Begriffen wie der Blochtransformation, dem Blocheigenwertproblem und der Regularität der Blochfunktionen beschäftigen.

Blocheigenwertproblem

Wir behandeln für den allgemeinen Fall von d Dimensionen das Blocheigenwertproblem und werden einige bekannte Ergebnisse aufgreifen. Wir betrachten das zu Gleichung (1.3) gehörige lineare Problem

$$i\partial_t u + \Delta u - V(x)u = 0 \tag{2.2}$$

mit $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}$ und $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei das Potential V periodisch, so dass $V(x + 2\pi e_j) = V(x)$ für $j = 1, \dots, d$, wobei e_j der j -te Einheitsvektor ist.

Für (2.2) suchen wir Lösungen in Form einer Blochwelle, das heißt $u(x, t) = e^{-i\omega t}\psi(x, k)$. Setzen wir die Blochwelle in (2.2) ein, so erhalten wir

$$i\partial_t e^{-i\omega t}\psi(x, k) + \Delta(e^{-i\omega t}\psi(x, k)) - V(x)e^{-i\omega t}\psi(x, k) = 0,$$

woraus folgt, dass

$$(-\Delta + V)\psi = \omega\psi \tag{2.3}$$

ist. Nach dem Blochtheorem haben stationäre beschränkte Lösungen von (2.2) die Form einer Wellenfunktion der Art $\psi(x, k) = p(x, k)e^{ik \cdot x}$ [SI07]. Die Eigenfunktionen p heißen Blochfunktionen und haben die gleiche Periodizität wie das Potential V , multipliziert mit der komplexen Phase einer ebenen Welle, siehe [SR78].

Setzen wir diese Darstellung für ψ in (2.3) ein, so ergibt sich das Blocheigenwertproblem

$$\mathcal{L}(x, k)p := (-|\nabla + ik|^2 + V)p = \omega p, x \in \mathbb{T} \tag{2.4}$$

mit $k \in \mathbb{B} := (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$ und dem d -dimensionalen Torus $\mathbb{T} := \mathbb{R}^d / (2\pi\mathbb{Z}^d)$. Wir nennen \mathbb{B} die *Brillouinzone*.

Im weiteren Verlauf werden wir die Selbstadjungiertheit des Operators benutzen, weshalb wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 2.6. *Der Operator $\mathcal{L}(\cdot, k) = (-|\nabla + ik|^2 + V)$ ist selbstadjungiert in $L^2(\mathbb{T})$.*

Beweis. Sei $\mathcal{L}(x, k) = (-|\nabla + ik|^2 + V)$.

Es ist

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}(x, k)f, g \rangle_{\mathbb{T}} &= \int_{\mathbb{T}} (-|\nabla + ik|^2 + V) f(x) \bar{g}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} (-\Delta - 2ik \cdot \nabla + |k|^2 + V) f(x) \bar{g}(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}} f(x) \overline{(-\Delta - 2ik \cdot \nabla + |k|^2 + V) g(x)} dx \\ &= \langle f, \mathcal{L}(x, k)g \rangle_{\mathbb{T}}. \end{aligned}$$

Weiter ist

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ f \in H^2(\mathbb{T}) \mid \tilde{f} \in H_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d) \right\}$$

mit \tilde{f} periodische Fortsetzung von f auf \mathbb{R}^d und es ist $D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}^*)$. \square

Für jedes $k \in \mathbb{B}$ existieren in (2.4) unendlich viele Eigenwerte $\omega_n(k)$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\omega_n(k) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$. Die abzählbar vielen Eigenpaare von (2.4) bezeichnen wir mit (ω_n, p_n) . Das Spektrum von $L := -\Delta + V$ ist reell und gegeben durch

$$\sigma(L) = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ k \in \mathbb{B}}} \omega_n(k).$$

Den Graphen $(k, \omega_n(k))$ bezeichnen wir als Bandstruktur und wir sortieren die Eigenwerte der Größe nach, das heißt $\omega_1(k) \leq \dots \leq \omega_n(k) \leq \omega_{n+1}(k) \leq \dots$, wobei $\omega_n(k)$ n-tes Blochband heißt. Wir wählen die übliche Normalisierung, so dass die Blochfunktionen $p_n(x, k)$ ein Orthonormalsystem in $L^2(\mathbb{T})$ bilden, das heißt

$$\langle p_j(\cdot, k), p_l(\cdot, k) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \delta_{j,l}, \quad j, l \in \mathbb{N}.$$

Die p_n sind quasiperiodisch in k , was bedeutet, dass

$$p_n(x, k + e_j) = p_n(x, k) e^{-ix_j} \quad \text{für } j = 1, \dots, d. \quad (2.5)$$

Das Sortieren der Eigenwerte nach ihrer Größe hat zur Folge, dass die Blochbänder nicht differenzierbare Stellen haben. Diese entstehen durch die Schnittstellen in der Bandstruktur. Das Differenzieren des Eigenwertproblems nach k außerhalb der Schnittmenge der Bänder führt formal zu der Gleichung

$$\begin{aligned} & -\Delta_x \nabla_k p_n - 2i(\nabla_x p_n + k \nabla_k \nabla_x p_n) + 2k p_n - |k|^2 \nabla_k p_n + V(x) \nabla_k p_n \\ &= \omega_n \nabla_k p_n + p_n \nabla_k \omega_n. \end{aligned}$$

Aus Abschnitt 2.1 wissen wir, dass die Gruppengeschwindigkeit die Form $v_g^{(n)}(k) := \nabla \omega_n(k)$ für $n = 1, \dots, d$ hat. Stellen wir den obigen Term nach $\nabla \omega_n(k)$, so erhalten wir für die Gruppengeschwindigkeit $v_g^{(n)}(k)$, dass

$$v_g^{(n)}(k) = \nabla \omega_n(k) = 2 \langle (k - i\nabla)p_n, p_n \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

gegeben ist. Die Gruppengeschwindigkeit werden wir an späterer Stelle benötigen.

Blochtransformation

Um später die Coupled Mode Gleichungen als Approximation für die periodische nichtlineare Schrödingergleichung zu rechtfertigen, definieren wir die Blochtransformation, welche eine Erweiterung der Fouriertransformation darstellt. Die Blochtransformation wurde im Jahr 1950 von Gelfand eingeführt [Gel50] und später für die Analysis des Schrödinger Operators $-\frac{d}{dx^2} + V$ genutzt [SR78]. Der Vorteil einer Transformation in Blochvariablen ist, dass die linearen Eigenfunktionen p_n alle 2π -periodisch in jeder Ortskoordinate sind. Das Orthogonalisierungsgebiet ist daher immer der d -dimensionale Torus \mathbb{T} .

Für die Definition der Blochtransformation in d Dimensionen nutzen wir die Fouriertransformation.

Definition 2.7. (Fouriertransformation)

Wir definieren die Fouriertransformation $\mathcal{F}(u) = \hat{u}$ als

$$\hat{u}(k) := \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} u(x) e^{-ik \cdot x} dx$$

und die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}u = \check{u}$ als

$$\check{u}(k) := \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(x) e^{ik \cdot x} dx. \quad (2.6)$$

Es gilt, dass $u = (\hat{u})^\vee$ [Eva10], falls $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Für die Motivation der Blochtransformation schreiben wir formal

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(k) e^{ik \cdot x} dk = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{B}} e^{i(k+\eta) \cdot x} \hat{u}(k + \eta) dk =: \int_{\mathbb{B}} e^{ik \cdot x} \tilde{u}(x, k) dk$$

mit $\mathbb{B} = (-1/2, 1/2]^d$.

Definition 2.8. (Blochtransformation)

Die Blochtransformation ist definiert durch

$$\tilde{u}(x, k) := (\mathcal{T}u)(x, k) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}(k + \eta) e^{i\eta \cdot x} \quad (2.7)$$

mit

$$\mathcal{T} : H^s(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$$

und der Rücktransformation $u(x) = \mathcal{T}^{-1} \tilde{u}(x, k) := \int_{\mathbb{B}} e^{ik \cdot x} \tilde{u}(x, k) dk$.

Lemma 2.9. Die Blochtransformation ist für $s \geq 0$ ein Isomorphismus von $H^s(\mathbb{R}^d)$ nach $L^2(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$.

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zur Isomorphismuseigenschaft der Fouriertransformation in [SR78]. \square

Die Blochtransformation erfüllt eine Reihe von Eigenschaften, welche in dem folgenden Lemma aufgelistet sind [Doh16]. Auf diese werden wir im Verlauf der Arbeit immer wieder verweisen.

Lemma 2.10. (Eigenschaften der Blochtransformation)

Für alle $f, g \in H^s(\mathbb{R}^d)$ und $1 \leq j \leq d$, $s \geq p \in \mathbb{N}$ erfüllt die Blochtransformation die folgenden Eigenschaften:

(i) $\mathcal{T}(u)(x, k) = \mathcal{T}(u)(x + 2\pi e_j, k)$ (Periodizität in x) und
 $\mathcal{T}(u)(x, k) = \mathcal{T}(u)(x, k + e_j)e^{ix_j}$ für alle $x, k \in \mathbb{R}^d$ (Quasiperiodizität in k).

(ii) $\mathcal{T}(\partial_{x_j}^p u)(x, k) = (\partial_{x_j} + ik_j)^p (\mathcal{T}u)(x, k)$.

(iii) Für eine Funktion V mit $V(x + 2\pi e_m) = V(x) \forall m \in \{1, \dots, d\}$, e_m m -ter Einheitsvektor, gilt
 $\mathcal{T}(Vu)(x, k) = V(x)(\mathcal{T}u)(x, k)$.

(iv) Die Multiplikation in physikalischen Variablen entspricht einer Faltung im Blochraum, das heißt

$$\mathcal{T}(uv)(x, k) = (\mathcal{T}(u) *_{\mathbb{B}} \mathcal{T}(v))(x, k) = \int_{\mathbb{B}} \mathcal{T}(u)(x, k - l) \mathcal{T}(v)(x, l) dl. \quad (2.8)$$

Beweis. (i) Dies folgt direkt aus (2.7).

(ii) Wir betrachten die Ableitung nach der j -ten Komponente:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\partial_{x_j}^p u) &= \sum_{\eta_j \in \mathbb{Z}^d} i^p (k_j + \eta_j)^p \hat{u}(k + \eta) e^{i\eta \cdot x} = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} (\partial_{x_j} + ik_j)^p (\hat{u}(k + \eta) e^{i\eta \cdot x}) \\ &= (\partial_{x_j} + ik_j)^p \tilde{u}. \end{aligned}$$

(iii) $V(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} V_j e^{ij \cdot x}$, $V_j \in \mathbb{C} \forall j$ und $\mathcal{F}(e^{ij \cdot x} u(x))(k) = \hat{u}(k - j)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(Vu) &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} V_j \hat{u}(k + (\eta - j)) e^{i\eta \cdot x} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} V_j e^{ij \cdot x} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}(k + (\eta - j)) e^{i(\eta - j) \cdot x} \\ &= V \tilde{u}. \end{aligned}$$

(iv) Es ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(uv) &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \widehat{uv}(k + \eta) e^{i\eta \cdot x} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (\hat{u} * \hat{v})(k + \eta) e^{i\eta \cdot x} \\
 &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(k + \eta - \xi) \hat{v}(\xi) d\xi e^{i\eta \cdot x}, \quad \xi = l + m \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{B}} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}(k + \eta - l - m) e^{i(\eta - m) \cdot x} \hat{v}(l + m) dl e^{im \cdot x}, \quad \alpha := \eta - m \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{B}} \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \hat{u}(k + \alpha - l) e^{i\alpha \cdot x} \hat{v}(l + m) dl e^{im \cdot x} \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{B}} \tilde{u}(x, k - l) \hat{v}(l + m) dl e^{im \cdot x} = \int_{\mathbb{B}} \tilde{u}(x, k - l) \tilde{v}(x, l) dl = \tilde{u} *_{\mathbb{B}} \tilde{v}.
 \end{aligned}$$

Wenn in der Faltung in (2.8) $k - l \notin \mathbb{B}$ ist, dann nutzen wir die Quasiperiodizität in k aus 2.10 (i).

□

Da die Blochtransformation ein Isomorphismus von $H^s(\mathbb{R}^d)$ nach $L^2(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$ ist, liegt es nahe, die Abschätzungen von $\|u - u^{app}\|$ in Kapitel 6 in dem Raum $L^2(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$ durchzuführen. Das Problem an dieser Vorgehensweise ist jedoch, dass man in L^2 zu viele ε -Potenzen verliert. Wir werden später mit einem blochtransformierten Term arbeiten, der im Wesentlichen von der Form $\varepsilon^{1/2-d} \hat{u}(\frac{k}{\varepsilon})$ ist. Für L^2 gilt, dass

$$\left\| \hat{u} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^{d/2} \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Diese Abschätzung reicht nicht aus, um die ε -Potenz, resultierend aus dem transformierten Ansatz, zu kompensieren. Das heißt, der asymptotische Fehler ist nicht klein genug auf dem gewünschten Zeitintervall $[0, \varepsilon^{-1}T_0]$. Für L^1 ist jedoch

$$\left\| \hat{u} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \varepsilon^d \|\hat{u}\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

was uns die benötigte Fehlerordnung liefert. Aus diesem Grund nutzen wir später in den Abschätzungen in Kapitel 5 und 6 den Raum $L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$ mit der Norm

$$\|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} := \int_{\mathbb{B}} \|\tilde{u}(\cdot, k)\|_{H^s(\mathbb{T})} dk.$$

Durch die $L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$ -Norm erhalten wir eine Abschätzung der C_b^0 -Norm [DH17].

Lemma 2.11. *Sei $s > d/2$. Dann existiert ein $c > 0$, so dass für alle $\tilde{u} \in L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$, welche Bedingung (i) aus Lemma 2.10 erfüllen, gilt dass*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |u(x)| \leq c \|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \forall x$$

für $u = \mathcal{T}^{-1}\tilde{u}$ und

$$u(x) \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow \infty.$$

Beweis. Wir nutzen den Sobolevschen Einbettungssatz mit $0 < s - \frac{d}{2}$ und erhalten

$$\|u\|_{C_b^0(\mathbb{R}^d)} \leq \int_{\mathbb{B}} \|\tilde{u}(\cdot, k)\|_{C_b^0(\mathbb{T})} dk \leq c \int_{\mathbb{B}} \|\tilde{u}(\cdot, k)\|_{H^s(\mathbb{T})} dk = c \|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))}.$$

Mit den gleichen Schritten wie im Beweis des Lemmas von Riemann-Lebesgue kann man zeigen, dass $u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$. Dafür approximiert man \tilde{u} durch $v \in C^\infty(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$ mit $v(x, k + e_j) = v(x, j)e^{-ix_j}$ und $v(x + 2\pi, k) = v(x, k)$ für $j = 1, \dots, d$ für alle x, k und nutzt die partielle Integration. \square

Faltungsterme können wir mit Hilfe des folgenden Lemmas abschätzen [DH17].

Lemma 2.12. *Sei $\tilde{u}, \tilde{v} \in L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$ mit $s > d/2$. Dann ist*

$$\|\tilde{u} * \tilde{v}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \leq \|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \|\tilde{v}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} * \tilde{v}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} &= \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \|\tilde{u}(\cdot, k-l)\tilde{v}(\cdot, l)\|_{H^s(\mathbb{T})} dl dk \\ &\leq \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} c \|\tilde{u}(\cdot, k-l)\|_{H^s(\mathbb{T})} \|\tilde{v}(\cdot, l)\|_{H^s(\mathbb{T})} dl dk \\ &\leq c \|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \|\tilde{v}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))}, \end{aligned}$$

wobei in der ersten Abschätzung die Algebraeigenschaft von H^s in d Dimensionen

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq c \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

für $s > d/2$ und $f, g \in H^s$ genutzt wurde, siehe Lemma A.2, und in der zweiten Abschätzung die Youngsche Ungleichung für Faltungen

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

siehe Lemma A.7. \square

Entwicklung in Blochfunktionen

Für jedes $k \in \mathbb{B}$ sind die Eigenfunktionen $(p_n(\cdot, k))_{n \in \mathbb{N}}$ von $L(k)$ vollständig in $L^2((0, 2\pi)^d)$, das heißt, wir können \tilde{u} für jedes feste $k \in \mathbb{B}$ und $s \geq 0$ in Blochfunktionen entwickeln. Der Entwicklungsoperator wird mit D bezeichnet, wobei

$$D(k) : \tilde{u}(\cdot, k) \mapsto \vec{U}(k) := \left(\langle \tilde{u}(\cdot, k), p_n(\cdot, k) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Die Abbildung $D(k)$ ist ein Isomorphismus von $H^s(\mathbb{T})$ nach $l_{s/d}^2$, wobei

$$l_{s/d}^2 := \left\{ v \in l^2(\mathbb{C}) : \|v\|_{l_{s/d}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{2s/d} |v_n|^2 < \infty \right\}.$$

Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 3.3 in [BSTU06]. Für die Entwicklungskoeffizienten \vec{U} definieren wir den Raum

$$\mathcal{X}(s) := L^1\left(\mathbb{B}, l_{s/2}^2\right),$$

versehen mit der Norm $\|\vec{U}\|_{\mathcal{X}(s)} = \int_{\mathbb{B}} \|\vec{U}(k)\|_{l_{s/2}^2} dk$.

Lemma 2.13. *Der Operator $\mathcal{D} : L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T})) \rightarrow \mathcal{X}(s)$, $\tilde{u} \mapsto \vec{U}$ ist für $s \geq 0$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Wegen der Isomorphieeigenschaft von $D(k)$ gibt es Konstanten c_1 und c_2 , so dass für jedes $\vec{U}(k) = D(k)\tilde{u}(\cdot, k)$ gilt, dass

$$c_1 \|\tilde{u}(\cdot, k)\|_{H^s(\mathbb{T})} \leq \|\vec{U}(k)\|_{l_{s/2}^2} \leq c_2 \|\tilde{u}(\cdot, k)\|_{H^s(\mathbb{T})}.$$

Nun ist

$$c_1 \|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} = c_1 \int_{\mathbb{B}} \|\tilde{u}(\cdot, k)\|_{H^s(\mathbb{T})} dk \leq \int_{\mathbb{B}} \|\vec{U}(k)\|_{l_{s/2}^2} dk = \|\vec{U}\|_{\mathcal{X}(s)}$$

und

$$\|\vec{U}\|_{\mathcal{X}(s)} = \int_{\mathbb{B}} \|\vec{U}(k)\|_{l_{s/2}^2} dk \leq c_2 \int_{\mathbb{B}} \|\tilde{u}(\cdot, k)\|_{H^s(\mathbb{T})} dk = c_2 \|\tilde{u}\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))}.$$

□

Die asymptotische Verteilung der Eigenwerte liefert uns das folgende Lemma.

Lemma 2.14. *Es existieren Konstanten $C_1, C_2 > 0$, so dass*

$$C_1 n^{2/d} \leq |\omega_n(k)| \leq C_2 n^{2/d} \quad k \in \mathbb{B}, n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Für den Beweis definiert man $N(\lambda)$ als Anzahl der Eigenwerte $\omega_n(k)$, die kleiner gleich λ sind. Die obige Aussage folgt dann aus der Asymptotik

$$N(\lambda) = c\lambda^{\frac{d}{2}} + \mathcal{O}\left(\lambda^{\frac{d-1}{2}}\right)$$

für $c > 0$ [Hoe85, S.55].

□

Regularität der Blochfunktionen

In unseren späteren Rechnungen, vor allem in der Rechtfertigung in Kapitel 6, werden wir eine gewisse Regularität der Blochfunktionen p_n benötigen. In diesem Abschnitt möchten wir die Abhängigkeit der Regularität der Blochfunktionen von dem Potential V in (1.6) untersuchen.

Hier kann man vorgehen wie in dem Beweis der Abhängigkeit von der Regularität der Koeffizienten für elliptische Probleme, welche in [GT01] beschrieben wird. Allerdings sind solche Abschätzungen in unserem Fall nicht scharf, da in [GT01] nur ganzzahlige s betrachtet werden. Wir werden daher mit einer Fourierreihenentwicklung arbeiten, um auch nicht ganzzahlige s zu berücksichtigen. Die Regularität der Blochfunktionen ist im folgenden Lemma beschrieben [DR18].

Lemma 2.15. *Sei $s > 0$, V in $H^{s+d-2+\delta}(\mathbb{T})$ mit $\delta > 0$ und $V(x + 2\pi e_j) = V(x) \forall x \in \mathbb{R}^d$ und sei $p_n(\cdot, k)$ Lösung von (2.4). Dann ist $p_n(\cdot, k) \in H^s(\mathbb{T})$.*

Beweis. Im vorherigen Kapitel haben wir das Eigenwertproblem

$$(-|\nabla + ik|^2 + V) p_n = \omega_n p_n$$

für $n \in \mathbb{N}$ hergeleitet. Wir definieren $\gamma := p_n(\cdot, k)$ und $\varphi := \omega_n(k) - V$. Damit erhalten wir

$$-|\nabla + ik|^2 \gamma = \varphi \gamma. \quad (2.9)$$

Wir entwickeln γ und φ in Fourierreihen, so dass

$$\gamma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \Gamma_n e^{in \cdot x}, \quad \varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \Phi_n e^{in \cdot x}$$

mit den Fourierkoeffizienten Γ_n und Φ_n . Die linke Seite von (2.9) lässt sich wie folgt umformen. Wir haben

$$\begin{aligned} -|\nabla + ik|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \Gamma_n e^{in \cdot x} &= (-\Delta - 2ik \cdot \nabla + |k|^2) \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \Gamma_n e^{in \cdot x} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} (|n|^2 + 2k \cdot n + |k|^2) \Gamma_n e^{in \cdot x}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite von (2.9) gilt mit der Cauchyformel

$$\varphi(x) \gamma(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \Phi_n e^{in \cdot x} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \Gamma_n e^{in \cdot x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \Phi_{n-j} \Gamma_j e^{in \cdot x}.$$

Deshalb erfüllt der Koeffizientenvektor $\vec{\Gamma} = (\Gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$, dass

$$(|n|^2 + 2k \cdot n + |k|^2) \Gamma_n = \left(\vec{\Phi} * \vec{\Gamma} \right)_n \quad (2.10)$$

mit $\left(\vec{\Phi} * \vec{\Gamma} \right)_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \Phi_{n-j} \Gamma_j$ und $\vec{\Gamma} = (\Gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$. Per Definition ist $\gamma \in H^s(\mathbb{T})$ äquivalent zu $\vec{\Gamma} \in l_s^2(\mathbb{Z}^d)$. Das heißt, wir erhalten

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\Gamma_n|^2 (1 + |n|^{2s}) < \infty.$$

Das Lemma ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass $\vec{\Gamma} \in l_{\tau+2}^2(\mathbb{Z}^d)$, wenn $\vec{\Gamma} \in l_\tau^2(\mathbb{Z}^d)$, $\tau \geq 0$ für alle $0 \leq \tau \leq s - 2$ gilt. Dafür nutzen wir (2.10). Da k beschränkt ist, folgt mit (2.10),

dass $((|n|^2 + 2k \cdot n + |k|^2) \Gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in l_\tau^2(\mathbb{Z}^d)$, genau dann, wenn $(|n|^2 \Gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in l_\tau^2(\mathbb{Z}^d)$. Es reicht also zu zeigen, dass $\vec{\Phi} * \vec{\Gamma} \in l_\tau^2(\mathbb{Z}^d)$. Wir betrachten

$$\begin{aligned}
 \|\vec{\Phi} * \vec{\Gamma}\|_{l_\tau^2(\mathbb{Z}^d)}^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left| \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \Phi_{n-j} \Gamma_j \right|^2 (1 + |n|^{2\tau}) \\
 &\leq c \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (|\Phi_{n-j}| |\Gamma_j| (1 + |n-j|^\tau))^2 + \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (|\Phi_{n-j}| |\Gamma_j| (1 + |j|^\tau))^2 \right) \\
 &\leq c \left(\|\vec{\Phi}\|_{l_\tau^1}^2 \|\vec{\Gamma}\|_{l_\tau^2}^2 + \|\vec{\Phi}\|_{l_\tau^1}^2 \|\vec{\Gamma}\|_{l_\tau^2}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde wieder die Youngsche Ungleichung für Faltungen im diskreten Fall genutzt [GFW16]. Weiter gilt, dass

$$\begin{aligned}
 |\Phi_n| |n|^a &= (|\Phi_n|^2 |n|^{2a})^{1/2} \leq (|\Phi_n|^2 (1 + |n|^{2a}))^{1/2} \leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\Phi_n|^2 (1 + |n|^{2a}) \right)^{1/2} = \|\Phi\|_{l_a^2} \\
 &\leq c \|\varphi\|_{H^a(\mathbb{T})}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Daraus folgt, dass

$$|\Phi_n| \leq \frac{c \|\varphi\|_{H^a(\mathbb{T})}}{|n|^a}.$$

Für $\vec{\Phi} \in l_\tau^1(\mathbb{Z}^d)$ benötigen wir per Definition, dass $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |\Phi_n| (1 + |n|^\tau) < \infty$ erfüllt ist. Mit (2.11) wissen wir, dass $|\Phi_n| \leq \frac{c}{|n|^a}$ für $\varphi \in H^a$. Also benötigen wir

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} |n|^{\tau-a} < \infty.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $a > d - \tau$.

Wir haben also gezeigt, dass $\vec{\Phi} * \vec{\Gamma} \in l_\tau^2(\mathbb{Z}^d)$. Mit Gleichung (2.10) wissen wir dann, dass $((|n|^2 + 2k \cdot n + |k|^2) \Gamma_n)_{n \in \mathbb{Z}^d} \in l_\tau^2(\mathbb{Z}^d)$, weshalb $\vec{\Gamma} \in l_{\tau+2}^2(\mathbb{Z}^d)$ folgt. Damit ist $\gamma \in H^{\tau+2}(\mathbb{T})$, falls $V \in H^{d+\tau+\delta}$ für ein $\delta > 0$. Daher kann die Glattheit $\gamma \in H^s(\mathbb{T})$ für $V \in H^{d+s-2+\delta}$ für ein $\delta > 0$ gefolgert werden. \square

Für einfache Eigenwerte in $k = k^{(j)}, j = 1, \dots, N$ haben wir Lipschitzstetigkeit in L^2 für die Blochfunktionen, das heißt

$$\|p_{n_0}(\cdot, k) - p_{n_0}(\cdot, k^{(j)})\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq l |k - k^{(j)}| \quad \forall k \in \mathbb{B} \tag{2.12}$$

für $l > 0$ und $j = 1, \dots, N$, siehe [Kat95, S. VII.2].

In der Rechtfertigung werden wir ebenso die Lipschitzstetigkeit von p_{n_0} bezüglich $H^a(\mathbb{T})$ für $a > 0$ benötigen. Dafür nutzen wir das folgende Lemma, welches analog zu [DR18] formuliert ist.

Lemma 2.16. Sei $q \in \mathbb{N}$, $V \in H^{2q-3}(\mathbb{T})$, $p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}) \in H^{2q-1}(\mathbb{T})$ und wir nehmen an, dass $\omega_{n_0}(k)$ einfacher Eigenwert für $k = k^{(j)}$ ist. Dann gilt

$$\|\mathcal{L}^q(p_{n_0}(\cdot, k) - p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}))\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq l|k - k^{(j)}| \quad \forall k \in \mathbb{B}$$

mit $l = l(\|p_{n_0}(\cdot, k^{(j)})\|_{H^{2q-1}(\mathbb{T})}, q)$ für $j = 1, \dots, N$.

Beweis. Zunächst betrachten wir den Fall, in dem der Operator $\mathcal{L}(x, k)$ einfach auf die Blochfunktion angewendet wird. Es ist für $j = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x, k)p_{n_0}(x, k^{(j)}) &= \mathcal{L}(x, k^{(j)})p_{n_0}(x, k^{(j)}) \\ &\quad + (k - k^{(j)})^T \left(-2i\nabla p_{n_0}(x, k^{(j)}) + (k + k^{(j)})p_{n_0}(x, k^{(j)}) \right) \\ &= \omega_{n_0}(k^{(j)})p_{n_0}(x, k^{(j)}) + \alpha_1(x, k, k^{(j)}), \end{aligned}$$

wobei $\|\alpha_1(\cdot, k, k^{(j)})\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq c|k - k^{(j)}|$ ist. Wendet man den Operator $\mathcal{L}(x, k)$ q -fach an, so erhält man die Abschätzung

$$\mathcal{L}(x, k)^q p_{n_0}(x, k^{(j)}) = \omega_{n_0}^q(k^{(j)})p_{n_0}(x, k^{(j)}) + \alpha_q(x, k, k^{(j)})$$

mit $\|\alpha_q(\cdot, k, k^{(j)})\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq c|k - k^{(j)}|$ mit $c = c(\|p_{n_0}(\cdot, k^{(j)})\|_{H^{2q-1}(\mathbb{T})})$ für $j = 1, \dots, N$. Dann ist

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{L}(x, k)^q (p_{n_0}(\cdot, k) - p_{n_0}(\cdot, k^{(j)})) \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= \left\| \omega_{n_0}^q(k)p_{n_0}(\cdot, k) - \omega_{n_0}^q(k^{(j)})p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}) - \alpha_q(\cdot, k, k^{(j)}) \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= |\omega_{n_0}^q(k) - \omega_{n_0}^q(k^{(j)})| \|p_{n_0}(\cdot, k)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\quad + |\omega_{n_0}^q(k^{(j)})| \|p_{n_0}(\cdot, k) - p_{n_0}(\cdot, k^{(j)})\|_{L^2(\mathbb{T})} + \left\| \alpha_q(\cdot, k, k^{(j)}) \right\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ &\leq l|k - k^{(j)}| \end{aligned}$$

mit $l = l(\|p_{n_0}(\cdot, k^{(j)})\|_{H^{2q-1}(\mathbb{T})}, q)$ für $j = 1, \dots, N$. Wir haben die Lipschitzstetigkeit der Blochfunktionen (2.12) genutzt sowie die Lipschitzstetigkeit von $k \mapsto \omega_{n_0}(k)$, siehe [CV97]. \square

Schließlich definieren wir den gewichteten L^1 -Raum als

$$L_r^1(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in L^1(\mathbb{R}^d) \mid \|f\|_{L_r^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |x|)^r |f(x)| dx < \infty \right\}. \quad (2.13)$$

Den Raum $L_r^1(\mathbb{R}^d)$ werden wir in späteren Abschätzungen in Kapitel 5 und Kapitel 6 benötigen.

3 Die Coupled Mode Gleichungen

Wie in der Einleitung beschrieben, möchten wir das asymptotische Verhalten von nichtlinearen Wellen in periodischen Strukturen untersuchen. Wellenpakete in nichtlinearen Problemen können mittels langsam variierender Einhüllendenapproximation untersucht werden. Der approximative Ansatz wird durch mehrere Blochwellen konstruiert, wobei unterschiedliche Ansätze zu unterschiedlichen effektiven Gleichungen führen. Unser Ansatz wird im Folgenden immer die gleiche Struktur haben, sich jedoch abhängig von der Dimension d in der Anzahl der Moden unterscheiden. In diesem Kapitel leiten wir formal die sogenannten Coupled Mode Gleichungen als effektive Gleichungen für die periodische nichtlineare Schrödingergleichung her.

3.1 Formale Herleitung der Coupled Mode Gleichungen in 1D

Wir betrachten die nichtlineare periodische Schrödingergleichung

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u - (V(x) + \varepsilon W(x))u - \sigma(x)|u|^2 u = 0, \quad x, t \in \mathbb{R} \quad (3.1)$$

mit $u = u(x, t)$, $V(x + 2\pi) = V(x)$, $\sigma(x + 2\pi) = \sigma(x)$ und $W(x + 2\pi/k_W) = W(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $k_W > 0$, wobei W den Mittelwert Null hat, das heißt

$$W(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} a_n e^{ink_W x}, \quad a_{-n} = \overline{a_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir nehmen an, dass V und σ stetig sind und $W \in C^2(\mathbb{R})$, wobei wir die Anforderungen an die Potentiale später genauer beschreiben werden.

Bemerkung 3.1. Die Ergebnisse dieses Kapitels wurden für den eindimensionalen Fall in [DH17] veröffentlicht. Wir fokussieren uns in der vorliegenden Arbeit auf die formale Herleitung der effektiven Gleichungen im Fall $d = 1$ und erläutern die Existenz von beweglichen Solitärwellen für die Coupled Mode Gleichungen. In [DH17] wird eine rigorose Rechtfertigung der Coupled Mode Gleichungen als effektive Gleichungen für die periodische nichtlineare Schrödingergleichung durchgeführt. Diese werden wir in der vorliegenden Arbeit nicht aufgreifen, da wir eine entsprechende Rechtfertigung in höheren Dimensionen in Kapitel 6 zeigen werden. Die Methodik unterscheidet sich insofern von [DH17], als dass wir im Beweis nicht zwischen k_{\pm} rational und k_{\pm} irrational unterscheiden und durch höhere Dimensionen umfangreichere Abschätzungen erhalten.

Aus den zwei Blochwellen $p_{n_0}(x, k_{\pm})e^{ik_{\pm}x}$ mit den Wellenzahlen k_+ und k_- und den 2π -periodischen Blocheigenfunktionen $p_{n_0}(x, k_{\pm})$, konstruieren wir für die Lösung u von (3.1) den formalen Ansatz

$$u^{\text{app}}(x, t) := \varepsilon^{1/2} e^{-i\omega_0 t} \left(A_+(\varepsilon x, \varepsilon t) p_{n_0}(x, k_+) e^{ik_+ x} + A_-(\varepsilon x, \varepsilon t) p_{n_0}(x, k_-) e^{ik_- x} \right) \quad (3.2)$$

mit $0 < \varepsilon \ll 1$ mit langsamer Modulation in Raum und Zeit $(\varepsilon x, \varepsilon t)$. Dabei bezeichnen A_+ und A_- Einhüllende des Wellenpakets und (k_+, ω_0) , (k_-, ω_0) sind Punkte auf der sogenannten Bandstruktur.

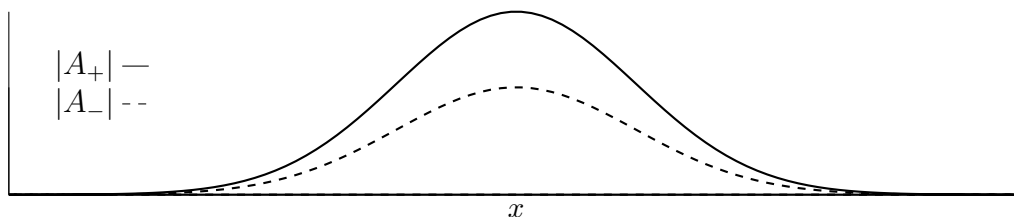


Abbildung 3.1: Beispiel für die Struktur der Einhüllenden $A_+(\varepsilon x, \varepsilon t)$ und $A_-(\varepsilon x, \varepsilon t)$ für ein festes t .

Mit Ansatz (3.2) möchten wir nun die sogenannten Coupled Mode Gleichungen als effektive Gleichungen für (3.1) herleiten. Das Blocheigenwertproblem aus Kapitel 2.2 lautet in einer Dimension

$$\left(-(\partial_x + ik)^2 + V(x) \right) p_n(x, k) = \omega_n(k) p_n(x, k). \quad (3.3)$$

Nach Normalisierung erfüllen die Eigenfunktionen

$$\langle p_n(\cdot, k), p_m(\cdot, k) \rangle_{2\pi} := \langle p_n(\cdot, k), p_m(\cdot, k) \rangle_{L^2(0, 2\pi)} = \delta_{n,m} \text{ für alle } k \in \mathbb{B}.$$

Im Folgenden werden wir die p_n als Blochfunktionen bezeichnen. Für jedes feste $k \in \mathbb{B}$ ist die Menge $(p_n(\cdot, k))_{n \in \mathbb{N}}$ vollständig in $L^2(0, 2\pi)$. Die Blochfunktionen sind periodisch in x , das heißt $p_n(x + 2\pi, k) = p_n(x, k)$ und als Funktionen in k erfüllen sie die Periodizitätsbedingung

$$p_n(x, k + 1) = p_n(x, k) e^{-ix}.$$

Weil die komplexe Konjugation von (3.3) äquivalent zum Ersetzen von k durch $-k$ ist, gilt

$$p_n(\cdot, -k) = \overline{p_n(\cdot, k)} \text{ für } k \in (0, 1/2). \quad (3.4)$$

Wir wählen in Ansatz (3.2) $\omega_0 \in \text{spec}(-\partial_x^2 + V)$, so dass es zwei linear unabhängige Eigenfunktionen von (3.3) in $\omega = \omega_0$ gibt und wir bezeichnen mit k_+ und k_- die zugehörigen Werte in der Niveaumenge von ω_0 . Aufgrund der symmetrischen Bandstruktur $\omega_n(-k) = \omega_n(k)$ und der Monotonie $\omega'_n(k) \neq 0$ für alle $k \in (0, 1/2)$ sind nur die folgenden zwei Fälle möglich:

- (a) Einfache Eigenwerte in $k_+, k_- (k_+ = -k_-)$:
 $k_+ \in (0, 1/2), \omega_0 = \omega_{n_0}(k_+) = \omega_{n_0}(k_-)$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.
- (b) Doppelter Eigenwert in $k_+ = k_-$:
 $k_+ \in \{0, 1/2\}, \omega_0 = \omega_{n_0}(k_+) = \omega_{n_0+1}(k_+)$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.

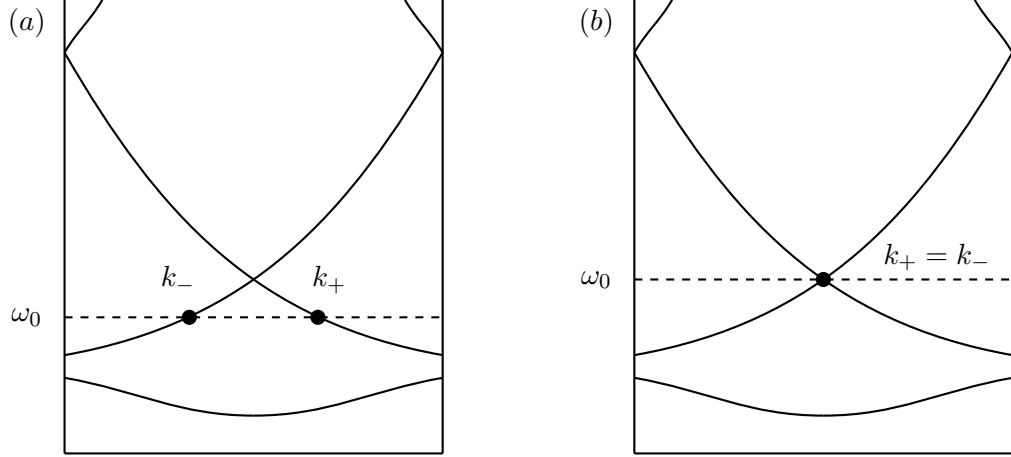


Abbildung 3.2: In der linken Abbildung ist Fall (a) mit einfachen Eigenwerten in k_+ und k_- mit $k_+ = -k_-$ dargestellt und in der rechten Abbildung Fall (b) mit einem doppelten Eigenwert in $k_+ = k_-$.

Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir die Blochfunktionen in k_+ und k_- als

$$p_+ := p_{n_0}(\cdot, k_+), \quad p_- := p_{n_0}(\cdot, k_-).$$

Wir erhalten die Gruppengeschwindigkeit v_g durch die Differentiation des Eigenwertproblems (3.3) in k . Es ist

$$v_g := \omega'_{n_0}(k_+) = 2\langle k_+ p_+ - i\partial_x p_+, p_+ \rangle_{2\pi} = -2\langle k_- p_- - i\partial_x p_-, p_- \rangle_{2\pi} = -\omega'_{n_0}(k_-),$$

wobei die Symmetrie (3.4) zwischen p_+ und p_- genutzt wurde. Wir setzen den formalen Ansatz (3.2) mit Korrekturterm $u^{\text{app}} + \varepsilon^{3/2} u_1(x, \varepsilon x, \varepsilon t)$ in Gleichung (3.1) ein und sammeln Terme mit gleicher ε -Potenz. Wir werden unten erklären, welche Form u_1 hat.

Das Einsetzen liefert für die Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ die Terme

$$e^{-i\omega_0 t} \sum_{\pm} A_{\pm}(X, T) (\omega_0 p_{\pm} + (\partial_x + ik_{\pm})^2 p_{\pm} - V(x) p_{\pm}) e^{ik_{\pm} x},$$

mit $X := \varepsilon x, T := \varepsilon t$, wobei der geklammerte Ausdruck durch die Wahl von p_{\pm} und ω_0 Null ergibt.

Für Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ wollen wir zunächst den Ausdruck $W u^{\text{app}}$ untersuchen. Unser Ziel ist es, die Terme mit einer 2π -periodischen Funktion multipliziert mit $e^{ik_{\pm} x}$ zu identifizieren. Deshalb zerlegen wir W in

$$W(x) = W^{(1)}(x) + e^{-2ik_{\pm} x} W_{\pm}^{(2)}(x) + W_{\pm}^{(3)}(x)$$

mit

$$\begin{aligned}
 W^{(1)}(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, nk_W \in \mathbb{Z}} a_n e^{ink_W x}, & W_{\pm}^{(2)}(x) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, nk_W \notin \mathbb{Z}, \\ nk_W + 2k_{\pm} \in \mathbb{Z}}} a_n e^{i(nk_W + 2k_{\pm})x}, \\
 W_{\pm}^{(3)}(x) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, nk_W \notin \mathbb{Z}, \\ nk_W + 2k_{\pm} \notin \mathbb{Z}}} a_n e^{i(nk_W)x}.
 \end{aligned}$$

Aufgrund der Art der Zerlegung sind $W^{(1)}(x)$ und $W_{\pm}^{(2)}(x)$ 2π -periodisch, während $W_{\pm}^{(3)}(x)$ nicht 2π -periodisch ist. Also garantiert im Fall $k_+ = -k_-$, $k_{\pm} \in (0, 1/2)$ der Teil $W_{\pm}^{(2)}(x)$ die Kopplung der zwei tragenden Wellen in (3.2), weil dessen Multiplikation mit $p_{\pm}(x)e^{ik_{\pm}x}$ eine periodische Funktion multipliziert mit $e^{ik_{\mp}x}$ ergibt. Im Fall $k_+ = k_- \in \{0, 1/2\}$ ist $W_{\pm}^{(2)}(x) = 0$ und die Kopplung wird durch $W^{(1)}(x)$ hervorgerufen.

Die gesammelten Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ lauten

$$\begin{aligned}
 &(\omega_0 + \partial_x^2 - V(x)) u_1(x, X, T) \\
 &+ \left[i(p_+ \partial_T A_+ + 2(k_+ p_+ - ip'_+) \partial_X A_+) - W^{(1)}(x) p_+ A_+ - W^{(1)}(x) p_- A_- \right. \\
 &- \sigma(x) (|p_+|^2 |A_+|^2 + 2|p_-|^2 |A_-|^2) p_+ A_+ \left. \right] e^{ik_+ x} \\
 &+ \left[i(p_- \partial_T A_- + 2(k_- p_- - ip'_-) \partial_X A_-) - W^{(1)}(x) p_- A_- - W^{(1)}(x) p_+ A_+ \right. \\
 &- \sigma(x) (|p_-|^2 |A_-|^2 + 2|p_+|^2 |A_+|^2) p_- A_- \left. \right] e^{ik_- x} \\
 &- \sigma(x) \left(p_+^2 \overline{p_-} A_+^2 \overline{A_-} e^{i(2k_+ - k_-)x} + p_-^2 \overline{p_+} A_-^2 \overline{A_+} e^{i(2k_- - k_+)x} \right) \\
 &- W_+^{(3)}(x) p_+ A_+ e^{ik_+ x} - W_-^{(3)}(x) p_- A_- e^{ik_- x}.
 \end{aligned}$$

Außer der letzten Zeile sind alle Terme, die mit $e^{ik_{\pm}x}$ oder $e^{i(2k_{\mp} - k_{\pm})x}$ multipliziert werden, 2π -periodisch in x . Wenn $2k_+ - k_- \in \{k_+, k_-\} + \mathbb{Z}$ ist, so kann $e^{i(2k_+ - k_-)x}$ ebenfalls als 2π -periodische Funktion, multipliziert mit e^{ik_+x} oder e^{ik_-x} geschrieben werden. Das gleiche gilt für $e^{i(2k_- - k_+)x}$. In den Fällen a) und b) tritt das genau dann auf, wenn $k_+ = -k_- = 1/4$ oder $k_+ = k_- \in \{0, 1/2\}$:

- $k_+ = -k_- = 1/4 \Rightarrow 2k_+ - k_- = k_- + 1$, das heißt $e^{i(2k_+ - k_-)x} = e^{ix} e^{ik_-x}$ und $2k_- - k_+ = k_+ - 1$, das heißt $e^{i(2k_- - k_+)x} = e^{-ix} e^{ik_+x}$.
- $k_+ = k_- \in \{0, 1/2\} \Rightarrow 2k_+ - k_- = 2k_- - k_+ = k_+ = k_-$.

Unser Ziel ist es, die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$, die proportional zu einer 2π -periodischen Funktion, multipliziert mit e^{ik_+x} oder e^{ik_-x} sind, zu Null zu setzen. Deshalb suchen wir ein $u_1(x, X, T)$ der Form

$$u_1(x, X, T) = U_{1,+}(X, T) s_+(x) e^{ik_+x} + U_{1,-}(X, T) s_-(x) e^{ik_-x} \quad (3.5)$$

mit 2π -periodischen Funktionen s_{\pm} , so dass diese Terme wegfallen. Nach der Fredholm Alternative existieren 2π -periodische Lösungen genau dann, wenn die inhomogenen Terme in (3.1), welche die Form einer 2π -periodischen Funktion, multipliziert mit $e^{ik_{\pm}x}$ haben,

L^2 -orthogonal zu $p_{\pm}(x)e^{ik_{\pm}x}$ sind. Das heißt, solch ein u_1 der Form (3.5) existiert formal, wenn die Fredholm Alternative gilt.

Basierend darauf ist die Idee, in dem effektiven System Terme zu sammeln, die in der ersten Gleichung proportional zu einem periodischen Term multipliziert mit e^{ik_+x} sind und in der zweiten Gleichung proportional zu einem periodischen Term multipliziert mit e^{ik_-x} . Das Multiplizieren der $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ -Terme mit $\overline{\psi_+}$ beziehungsweise $\overline{\psi_-}$ und die Integration über $(0, 2\pi)$ führt zu einer Reihe von Termen mit den Blochwellen ψ_+ , ψ_- und deren Ableitungen. Wegen der L^2 -Orthogonalität der Blochfunktionen ist $\langle p_-, p_+ \rangle = 0$. Weiter ist $\langle p_+, p_+ \rangle = 1$ und

$$\langle 2(k_+p_+ - ip'_+), p_+ \rangle =: v_g.$$

Das innere Produkt $\langle \partial_x p_-, p_+ \rangle$ fällt wegen des ungeraden Integranden weg. Außerdem erhalten wir eine Reihe von Integralen mit 2π -antiperiodischem Integranden, die ebenfalls wegfallen, nämlich $\langle |p_-|^2 p_-, p_+ \rangle$, $\langle |p_+|^2 p_-, p_+ \rangle$, $\langle p_+^3, p_+ \rangle$ und $\langle p_-^3, p_+ \rangle$. Damit lauten die effektiven Gleichungen

$$\begin{aligned} i(\partial_T + v_g \partial_X) A_+ + \kappa A_- + \kappa_s A_+ + \alpha \left(|A_+|^2 + 2|A_-|^2 \right) A_+ \\ + \beta \left(|A_-|^2 + 2|A_+|^2 \right) A_- + \overline{\beta} A_+^2 \overline{A_-} + \gamma A_-^2 \overline{A_+} = 0 \\ i(\partial_T - v_g \partial_X) A_- + \kappa A_+ + \kappa_s A_- + \alpha \left(|A_-|^2 + 2|A_+|^2 \right) A_- \\ + \overline{\beta} \left(|A_+|^2 + 2|A_-|^2 \right) A_+ + \beta A_-^2 \overline{A_+} + \overline{\gamma} A_+^2 \overline{A_-} = 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

mit

$$\begin{aligned} v_g &= 2\langle k_+ p_+ - i\partial_x p_+, p_+ \rangle_{2\pi} = -2\langle k_- p_- - i\partial_x p_-, p_- \rangle_{2\pi} \in \mathbb{R}, \\ \kappa_s &= -\langle W^{(1)} p_+, p_+ \rangle_{2\pi} = -\langle W^{(1)} p_-, p_- \rangle_{2\pi} \in \mathbb{R}, \\ \kappa &= \begin{cases} -\langle W^{(2)} p_-, p_+ \rangle_{2\pi} = -\langle W^{(2)} p_+, p_- \rangle_{2\pi} & \text{wenn } k_+ = -k_- \in (0, 1/2) \\ -\langle W^{(1)} p_-, p_+ \rangle_{2\pi} = -\langle W^{(1)} p_+, p_- \rangle_{2\pi} & \text{wenn } k_+ = k_- \in \{0, 1/2\}, \end{cases} \\ \alpha &= -\langle \sigma p_+^2, p_+^2 \rangle_{2\pi} = -\langle \sigma p_-^2, p_-^2 \rangle_{2\pi} = -\langle \sigma |p_-|^2 p_+, p_+ \rangle_{2\pi} = -\langle \sigma |p_+|^2 p_-, p_- \rangle_{2\pi} \in \mathbb{R}, \\ \beta &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } k_+ = -k_- \in (0, 1/2) \\ -\langle \sigma |p_{\pm}|^2 p_-, p_+ \rangle_{2\pi} = -\overline{\langle \sigma |p_{\pm}|^2 p_+, p_- \rangle_{2\pi}} & \text{wenn } k_+ = k_- \in \{0, 1/2\}, \end{cases} \\ \gamma &= \begin{cases} 0 & \text{wenn } k_+ = -k_- \in (0, 1/4) \cup (1/4, 1/2) \\ -\langle \sigma p_+^2 \overline{p_+} e^{-i}, p_+ \rangle_{2\pi} = -\overline{\langle \sigma p_+^2 \overline{p_+} e^i, p_+ \rangle_{2\pi}} & \text{wenn } k_+ = -k_- = 1/4 \\ -\langle \sigma |p_{\pm}|^2 p_-, p_+ \rangle_{2\pi} = -\overline{\langle \sigma p_+^2 \overline{p_+}, p_- \rangle_{2\pi}} & \text{wenn } k_+ = k_- \in \{0, 1/2\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Bewegliche Gap Solitone in 1D

Nun möchten wir uns mit der Frage befassen, ob es bewegliche, exponentiell lokalisierte Lösungen, also Solitärwellen, für die Coupled Mode Gleichungen gibt. Das Spektrum des

selbstadjungierten Operators

$$\begin{pmatrix} ic_g \partial_x + \kappa_s & \kappa \\ \kappa & -ic_g \partial_x + \kappa_s \end{pmatrix}$$

hat die Lücke $(\kappa_s - |\kappa|, \kappa_s + |\kappa|)$. Das heißt, der lineare Teil des Systems (3.6) hat eine spektrale Lücke, falls $\kappa \neq 0$. Die Definition von κ in (3.6) liefert eine notwendige Bedingung für eine spektrale Lücke.

(a) Wenn $k_+ = -k_- \in (0, 1/2)$ ist, dann lautet die Bedingung $\langle W_+^{(2)} p_+, p_- \rangle_{2\pi} \neq 0$.

(b) Wenn $k_+ = k_- \in \{0, 1/2\}$ ist, dann lautet die Bedingung $\langle W^{(1)} p_+, p_- \rangle_{2\pi} \neq 0$.

Wir können also exponentiell lokalisierte Lösungen (A_+, A_-) erwarten. Wie in der Einleitung erklärt, liegt das an der exponentiellen Form der linearen Lösungsmoden in spektralen Lücken und der dortigen Vernachlässigbarkeit der seitlichen Ausläufer der Lösung. Einen rigorosen Beweis für lokalisierte Solitärwellen von (3.6) werden wir in Abschnitt 5.3 für den Fall von zwei Raumdimensionen führen.

Wir setzen in (3.6) $\kappa_s = \beta = \gamma = 0$. Damit erhalten wir die klassischen Coupled Mode Gleichungen

$$\begin{aligned} i(\partial_T + c_g \partial_X) A_+ + \kappa A_- + \alpha (|A_+|^2 + 2|A_-|^2) A_+ &= 0 \\ i(\partial_T - c_g \partial_X) A_- + \kappa A_+ + \alpha (|A_-|^2 + 2|A_+|^2) A_- &= 0, \end{aligned}$$

mit der Gruppengeschwindigkeit c_g und $\kappa, \alpha \in \mathbb{R}$.

Für (3.1) existiert eine explizite Familie von exponentiell lokalisierten Solitärwellen, parametrisiert durch die Geschwindigkeit $v \in (-1, 1)$, [AW89, Doh14, GWH01]. Die Einhüllenden dieser Lösungen haben die Form

$$\begin{aligned} A_+(X, T) &= \nu a e^{i\eta} \sqrt{\frac{|\kappa|}{2|\alpha|}} \sin(\delta) \lambda^{-1} e^{i\zeta} \operatorname{sech}(\theta - i\delta/2) \\ A_-(X, T) &= -a e^{i\eta} \sqrt{\frac{|\kappa|}{2|\alpha|}} \sin(\delta) \lambda e^{i\zeta} \operatorname{sech}(\theta + i\delta/2) \end{aligned}$$

mit $\delta \in [0, \pi]$ und

$$\begin{aligned} \nu &= \operatorname{sign}(\kappa\alpha), \quad a = \sqrt{\frac{2(1-v^2)}{3-v^2}}, \quad \lambda = \left(\frac{1-v}{1+v}\right)^{1/4}, \quad e^{i\eta} = \left(-\frac{e^{2\theta} + e^{-i\nu\delta}}{e^{2\theta} + e^{i\nu\delta}}\right)^{\frac{2v}{3-v^2}}, \\ \theta &= \mu\kappa \sin(\delta) \left(\frac{X}{c_g} - vT\right), \quad \zeta = \mu\kappa \cos(\delta) \left(\frac{v}{c_g} X - T\right), \quad \mu = (1-v^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Numerische Beispiele für den eindimensionalen Fall werden in [Doh14] und [DH17] gegeben.

3.2 Die Coupled Mode Gleichungen in höheren Dimensionen

Wir konstruieren für das d -dimensionale Problem einen allgemeinen Ansatz aus N Moden und formulieren die Coupled Mode Gleichungen in d Raumdimensionen. Die Herleitung der einzelnen Terme erfolgt genau wie im eindimensionalen Fall, siehe 3.1. Wir approximieren die Lösung u von

$$i\partial_t u + \Delta u - (V(x) + \varepsilon W(x))u - \sigma(x)|u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R} \quad (3.7)$$

mit $V, \sigma \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ $2\pi\mathbb{Z}^d$ -periodisch durch den Ansatz u^{app} , wobei

$$u^{\text{app}}(x, t) := \varepsilon^{1/2} \sum_{j=1}^N A_j(\varepsilon x, \varepsilon t) p_j(x) e^{ik^{(j)} \cdot x} e^{-i\omega_0 t},$$

mit $x \in \mathbb{R}^d, k^{(j)} \in \mathbb{B}, j = 1, \dots, N$ und mit $p_j(x) := p_{n_0}(x, k^{(j)})$ Eigenfunktionen des Blocheigenwertproblems, siehe Abschnitt 2.2. Das Potential W führt mit dem gegebenen Ansatz zu linearen Resonanzen in den effektiven Gleichungen. Wir schreiben W als Fourierreihe

$$W(x) = \sum_{m=-m_0}^{m_0} a_m e^{iq_m \cdot x} \quad (3.8)$$

mit $m_0 \in \mathbb{N}$ und den Vektoren q_m für $m = -m_0, \dots, m_0$ paarweise unterschiedlich und es gilt

$$a_{-m} = \overline{a_m}, \quad q_{-m} = -q_m \quad \text{für alle } m \in \{0, 1, \dots, m_0\}$$

und

$$\left\{ q_m + \mathbb{Z}^d \mid m = -m_0, \dots, m_0 \right\} \supset \left\{ k^{(j)} - k^{(l)} \mid (j, l) \in \{1, \dots, N\}^2, j \neq l \right\}. \quad (3.9)$$

Wir wählen ein Potential W , welches in der Reihenentwicklung nur endlich viele Koeffizienten $a_m \neq 0$ hat. Dies erleichtert die späteren Rechnungen, und Bedingung (3.9) garantiert, dass durch W jede der N Moden mit allen anderen Moden linear gekoppelt ist. Nehmen wir zwei Moden $e^{ik^{(j)} \cdot x} p_{n_0}(x, k^{(j)})$ und $e^{ik^{(l)} \cdot x} p_{n_0}(x, k^{(l)})$ mit $j, l \in \{1, \dots, N\}$, so ist aufgrund der Wahl von W

$$e^{ik^{(j)} \cdot x} e^{iq_m \cdot x} = e^{ik^{(l)} \cdot x} P(x)$$

mit einem $2\pi\mathbb{Z}^d$ -periodischen P und einem $q \in \{-m_0, \dots, m_0\}$.

Das d -dimensionale Blocheigenwertproblem (2.4) liefert uns eine abzählbare Menge an Eigenwerten. Zur Erinnerung, diese sortieren wir der Größe nach

$$\omega_0(k) \leq \omega_1(k) \leq \omega_2(k) \leq \dots,$$

wobei ω_n das n -te Blochband der Dispersionsrelation innerhalb der periodischen Struktur beschreibt. Im Folgenden sei der Index n fixiert, das heißt wir betrachten ein festes Blochband $\omega_{n_0}(k)$. Die Punkte $(k^{(j)}, \omega_{n_0}(k^{(j)}))$, $j = 1, \dots, N$, aus denen der Ansatz konstruiert wird, liegen alle auf dem gleichen Band $\omega_0 := \omega_{n_0}(k^{(j)})$.

Bemerkung 3.2. Im allgemeinen Fall betrachten wir die N Punkte $(k^{(j)}, \omega_{l_j}(k^{(j)}))$ auf $B \leq N$ Bändern. Um in der Rechtfertigung in Kapitel 6 die Schreibarbeit zu verkürzen, werden wir mit dem oben beschriebenen Fall eines fixierten Blochbandes und den Punkten $(k^{(j)}, \omega_0)$ arbeiten.

Das Einsetzen des Ansatzes mit einem Korrekturterm $u^{\text{app}} + \varepsilon^{3/2}u_1$ in (3.7) mit $u_1(x, X, T)$ analog zum eindimensionalen Fall und das Sammeln der Terme mit Potenzen gleicher Ordnung in ε liefert uns für $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$

$$e^{-i\omega_0 t} \sum_{j=1}^N A_j(\varepsilon x, \varepsilon t) (\omega_0 p_j(x) - V(x)p_j(x) + |\nabla + ik|^2 p_j(x)) e^{ik^{(j)} \cdot x}.$$

Wegen der Wahl von ω_0 und p_j für jedes $j = 1, \dots, N$ und mit (2.4) verschwinden die Terme in der Klammer, so dass der obige Ausdruck Null ergibt. Die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ multipliziert mit $e^{i\omega_0 t}$ lauten

$$\begin{aligned} & (\omega_0 + \nabla - V(x)) u_1(x, X, T) \\ & + i\partial_T \sum_{j=1}^N A_j(X, T) p_j(x) e^{ik^{(j)} \cdot x} + \sum_{j=1}^N 2 \left(k^{(j)} p_j(x) - i\nabla p_j(x) \right) \cdot \nabla A_j(X, T) e^{ik^{(j)} \cdot x} \\ & - \sum_{m=-m_0}^{m_0} a_m A_j(X, T) p_j(x) e^{i(q_m + k^{(j)}) \cdot x} \\ & - \sigma(x) \sum_{\substack{k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)} \\ \in k^{(j)} + \mathbb{Z}^d}} A_\alpha(X, T) \bar{A}_\beta(X, T) A_\gamma(X, T) p_\alpha(x) \bar{p}_\beta(x) p_\gamma(x) e^{i(k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)} - k^{(j)}) \cdot x} \end{aligned}$$

mit $X = \varepsilon x$ und $T = \varepsilon t$. Um zu verstehen, wie die κ -Koeffizienten aus $\varepsilon W u^{\text{app}}$ zustande kommen, betrachten wir zunächst ein festes $m = m_*$. Das heißt, wir wählen aus den Termen der Ordnung $\varepsilon^{3/2}$ den Summanden

$$a_{m_*} e^{iq_{m_*} \cdot x} \sum_{r=1}^N A_r(X, T) p_r(x) e^{ik^{(r)} \cdot x},$$

multiplizieren ihn mit $p_j(x) e^{ik^{(j)} \cdot x}$ und integrieren über \mathbb{T} . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{T}} a_{m_*} e^{iq_{m_*} \cdot x} \sum_{l=1}^N A_l(X, T) p_l(x) e^{ik^{(l)} \cdot x} \bar{p}_j(x) e^{-ik^{(j)} \cdot x} \\ & = \sum_{l=1}^N A_l(X, T) \int_{\mathbb{T}} a_{m_*} p_l(x) \bar{p}_j e^{ik^{(l)} \cdot x} e^{-ik^{(j)} \cdot x} e^{iq_{m_*} \cdot x}. \end{aligned}$$

Damit folgt, dass

$$\kappa_{j,l}^{(*)} = \sum_{k^{(l)} + q_{m_*} \in k^{(j)} + \mathbb{Z}^d} a_{m_*} \int_{\mathbb{T}} e^{i(k^{(l)} + q_{m_*} - k^{(j)}) \cdot x} p_j(x) \bar{p}_l(x) dx.$$

Das führt uns zu den Coupled Mode Gleichungen

$$i \left(\partial_T A_j + v_g^{(j)} \cdot \nabla A_j \right) - \sum_{l=1}^N \kappa_{jl} A_l + \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, N\} \\ k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)} \\ \in k^{(j)} + \mathbb{Z}^d}} \gamma_j^{(\alpha, \beta, \gamma)} A_\alpha \overline{A_\beta} A_\gamma = 0 \quad (3.10)$$

für $j = 1, \dots, N$ mit

$$\begin{aligned} \gamma_j^{(\alpha, \beta, \gamma)} &= - \int_{\mathbb{T}} \sigma(x) p_\alpha(x) \overline{p_\beta(x)} p_\gamma(x) \overline{p_j(x)} e^{i(k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)} - k^{(j)}) \cdot x} dx, \\ \kappa_{j,l} &= \sum_{\substack{m=-m_0 \\ k^{(l)} + q_m \in k^{(j)} + \mathbb{Z}^d}}^{m_0} a_m \int_{L^2(\mathbb{T})} e^{i(k^{(l)} + q_m - k^{(j)}) \cdot x} p_j(x) \overline{p_l(x)} dx, \\ v_g^{(j)} &= \nabla \omega_{n_0}(k^{(j)}) = -2 \langle (\nabla + ik^{(j)}) p_j, p_j \rangle_{L^2(\mathbb{T})}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Mit den Annahmen an a_m und q_m ist die Matrix κ hermitesch.

3.3 Wohlgestellttheit der Coupled Mode Gleichungen

In diesem Abschnitt möchten wir ein Existenzresultat für die Coupled Mode Gleichungen (3.10) beweisen. Das Vorgehen wird in [GWH01] und [AS18] erläutert und basiert auf den Studien zu nichtlinearen Wellengleichungen von Reed in [Re76].

Für einen gegebenen selbstadjungierten Operator M auf einem Hilbertraum \mathcal{H} und für einen Anfangswert Φ_0 in \mathcal{H} , sowie eine nichtlineare Abbildung $J(\Phi)$ von \mathcal{H} nach \mathcal{H} möchten wir ein \mathcal{H} -wertiges Φ finden, so dass Φ Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi(t) &= -iM\Phi(t) + J(\Phi(t)) \\ \Phi(0) &= \Phi_0. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Die Idee ist es, Gleichung (3.12) in eine Integralgleichung der Form

$$\Phi(t) = e^{-iMt} \Phi_0 + \int_0^t e^{iM(t-s)} J(\Phi(s)) ds$$

umzuformen und ein Fixpunktargument anzuwenden. Wir beweisen den folgenden Satz.

Satz 3.3. *Für jedes $\vec{a} := (a_1, \dots, a_N) = \vec{A}(\cdot, 0) \in (H^s(\mathbb{R}^d))^N$ existiert ein $T > 0$ und eine eindeutige Lösung $\vec{A} := (A_1, \dots, A_N) \in C([0, T], (H^s(\mathbb{R}^d))^N) \cap C^1([0, T], (H^{s-1}(\mathbb{R}^d))^N)$ zu (3.10) für alle $s > d/2$.*

Beweis. Wir nutzen den Banachraum

$$X = C\left([0, T], \left(H^s(\mathbb{R}^d)\right)^N\right), s > d/2$$

mit der Norm

$$\|u\|_X = \sup_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_{(H^s)^N} \equiv \sup_{0 \leq t \leq T} \left(\sum_{j=1}^N \|u_j(t)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2}$$

für $u = (u_1, \dots, u_N)$.

Nun schreiben wir das System der Coupled Mode Gleichungen (3.10) in kompakter Form. Es ist

$$i\partial_T \vec{A} = -M \vec{A} + F(\vec{A}), \quad (3.13)$$

mit $\vec{A} = (A_1, \dots, A_N)^T$,

$$M = \begin{pmatrix} -iv_g^{(1)} \cdot \nabla + \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1N} \\ \overline{\kappa_{12}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \kappa_{1(N-1)} \\ \overline{\kappa_{1N}} & \dots & & -iv_g^{(N)} \cdot \nabla + \kappa_{NN} \end{pmatrix}$$

und der Nichtlinearität $F(\vec{A}) = (N_1(\vec{A}), \dots, N_N(\vec{A}))$ von (3.10).

Wir zeigen zunächst, dass M ein selbstadjungierter Operator ist. Dafür betrachten wir die Diagonalelemente. Sei $M^{(j)} := iv_g^{(j)} \cdot \nabla + \kappa_{jj}$, dann ist der Definitionsbereich des Operators $D(M^{(j)}) = \{H_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle M^{(j)} f, g \rangle &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{B_R(0)} (iv_g^{(j)} \cdot \nabla + \kappa_{jj}) f \bar{g} \, dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(- \int_{B_R(0)} f (iv_g^{(j)} \cdot \nabla - \kappa_{jj}) \bar{g} \, dx + \int_{\partial B_R(0)} i f \bar{g} v_g^{(j)} \cdot \frac{x}{|x|} dH^1 \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f \overline{(iv_g^{(j)} \cdot \nabla + \kappa_{jj}) g} \, dx = \langle f, M^{(j)} g \rangle. \end{aligned}$$

Der Definitionsbereich des adjungierten Operators ist $D(M^{(j)*}) = \{H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})\}$. Nun ist aber $H_0^1(\mathbb{R}^d) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}$ und wir können $H_0^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ mit $H^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ identifizieren. Dadurch sind die Definitionsbereiche von $M^{(j)*}$ und $M^{(j)}$ gleich und der Operator ist selbstadjungiert. Damit ist aber leicht zu sehen, dass M selbstadjungiert ist, siehe auch [Tri92].

Als nächstes möchten wir eine Abschätzung für die Nichtlinearität erhalten. Diese besteht aus Summanden der Form $A_k A_j$ für $j, k = 1, \dots, N$. Nach der Algebraeigenschaft von $H^s(\mathbb{R}^d)$, siehe Lemma A.2, gilt für $s > d/2$

$$\|\Phi_k \Psi_j\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq c \|\Phi_k\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \|\Psi_j\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq c \|\Phi\|_{(H^s(\mathbb{R}^d))^N} \|\Psi\|_{(H^s(\mathbb{R}^d))^N}.$$

Damit folgt aufgrund der kubischen Struktur der Nichtlinearität $F(\vec{A})$, dass

$$\|F(\vec{A})\|_{(H^s(\mathbb{R}^d))^N} \leq (\gamma_1 + \gamma_2) c_s \|\vec{A}\|_{(H^s(\mathbb{R}^d))^N}^3$$

mit $F : (H^s(\mathbb{R}^d))^N \rightarrow (H^s(\mathbb{R}^d))^N$.

Wir formulieren (3.13) zu $\partial_T \vec{A} - iM\vec{A} = -iF(\vec{A})$ um und nutzen das Duhamel Prinzip, siehe Lemma A.3, so dass wir

$$A(t) = e^{iMt} \vec{a} - i \int_0^t e^{iM(t-\tau)} F(\vec{A}(\tau)) d\tau =: \Phi(\vec{A})$$

erhalten. Wir nutzen, dass M selbstadjungiert ist. Mit dem Spektralsatz können wir M schreiben als

$$M = \int_{\sigma} \lambda(s) dP_{\lambda(s)}$$

wobei σ das Spektrum des Operators M bezeichnet und $dP_{\lambda(s)}$ das zugehörige Spektralmaß. Dann ist $S(t) := e^{iMt}$ gegeben durch

$$e^{iMt} = \int_{\sigma} e^{i\lambda(s)t} dP_{\lambda(s)}.$$

Da M selbstadjungiert ist, gilt

$$e^{iMt} (e^{iMt})^* = e^{iMt} e^{-iMt} = e^{i(M-M)t} = \text{Id},$$

das heißt, S ist unitäre Gruppe.

Die Wohlgestelltheit wollen wir nun mittels Fixpunktargument nachweisen. Um den Banachschen Fixpunktsatz anwenden zu können, müssen wir prüfen, ob Φ eine Selbstabbildung und eine Kontraktion ist.

1. $\Phi : \overline{B_R} \rightarrow \overline{B_R}$ Selbstabbildung in X , falls A_0 klein, das heißt $A \in \overline{B_R} \Rightarrow \Phi(\vec{A}) \in \overline{B_R}$. Sei $\|\vec{a}\|_{(H^s)^N} < \frac{R}{2}$, dann ist

$$\begin{aligned} \|\Phi(\vec{A})\|_{(H^s)^N} &= \left\| e^{iMt} A_0 - i \int_0^t e^{iM(t-\tau)} F(A(\tau)) d\tau \right\|_{(H^s)^N} \\ &\leq \|A_0\|_{(H^s)^N} + t\tilde{c} \|A\|_X^3 = \frac{R}{2} + t\tilde{c}R^3. \end{aligned}$$

Wegen $A \in \overline{B_R}$ gilt $\|A\|_X^3 < R^3$. Damit Φ eine Selbstabbildung ist, brauchen wir ein $t > 0$, so dass

$$\frac{R}{2} + t\tilde{c}R^3 \leq R,$$

denn dann liegt $\Phi(\vec{A})$ wieder in $\overline{B_R}$. Daraus folgt

$$\frac{1}{2} + t\tilde{c}R^2 \leq 1 \Rightarrow t \leq \frac{1}{2\tilde{c}R^2}.$$

2. Φ Kontraktion, das heißt $\|\Phi(\vec{A}) - \Phi(\vec{A}')\|_X \leq \delta \|\vec{A} - \vec{A}'\|_X$ für $\delta < 1$.

Es ist

$$\Phi(\vec{A}) - \Phi(\vec{A}') = -i \int_0^t e^{i(t-\tau)M} \left(F(\vec{A}(\tau)) - F(\vec{A}'(\tau)) \right) d\tau.$$

Weil e^{itM} unitär ist, gilt

$$\begin{aligned} \|\Phi(\vec{A}) - \Phi(\vec{A}')\|_X &\leq ct \sup_{0 \leq t \leq T} \|F(\vec{A}) - F(\vec{A}')\|_{(H^s)^N} \\ &\leq ct \sup_{0 \leq t \leq T} \|\vec{A} - \vec{A}'\|_{(H^s)^N} \|\tilde{F}(\vec{A}, \vec{A}')\|_{(H^s)^N}. \end{aligned}$$

Da \tilde{F} quadratisch in \vec{A} und \vec{A}' ist, nutzen wir wieder die Algebraeigenschaft von $(H^s)^N$ und erhalten

$$\|\Phi(\vec{A}) - \Phi(\vec{A}')\|_X \leq ctR^2 \|\vec{A} - \vec{A}'\|_X,$$

da $\vec{A}, \vec{A}' \in B_R$. Wir erhalten eine weitere Bedingung an t , da für die Kontraktionseigenschaft gelten muss, dass $\delta := ctR^2 < 1$ ist. Hier benötigen wir also $t < \frac{1}{R^2c}$.

Nun folgt mit dem Banachschen Fixpunktsatz die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes auf $[0, T]$ für $T := \min\left(\frac{1}{2\tilde{c}R^d}, \frac{1}{R^2c}\right)$, abhängig von den Konstanten c und \tilde{c} aus der Selbstabbildungs- und Kontraktionseigenschaft.

Wir haben gezeigt, dass die Coupled Mode Gleichungen lokal wohlgestellt sind. \square

Bemerkung 3.4. In Satz 3.3 haben wir die Existenz einer Lösung $A_j \in C([0, T], H^s(\mathbb{R}^d))$ gezeigt. Für unsere Rechtfertigung in Kapitel 6 benötigen wir die Existenz von Lösungen $\hat{A}_j(\cdot, T) \in L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)$. Diesen Zusammenhang kann man über die Definition des Sobolevraums $H^s(\mathbb{R}^d)$ mittels Fouriertransformation herstellen. Es ist

$$\|A_j\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |k|^2)^s |\hat{A}_j(k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \|\hat{A}_j\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |k|)^{s_A} |\hat{A}_j(k)| dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |k|)^{s_A - s} (1 + |k|)^s |\hat{A}_j(k)| dk \\ &\leq \|(1 + |k|)^{s_A - s}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|A_j\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

wobei die Cauchy-Schwarz-Ungleichung benutzt wurde. Der Ausdruck $\|(1 + |k|)^{s_A - s}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ existiert, falls $\int_{\mathbb{R}^d} (1 + |k|)^{2(s_A - s)} dk < \infty$, das heißt wenn $2(s_A - s) < -d$.

Das bedeutet, es gibt eine Lösung $\hat{A}_j \in L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)$, falls die Lösung $A_j \in H^s(\mathbb{R}^d)$ mit $s > s_A + d/2$.

Bemerkung 3.5. Wir haben in Satz 3.3 nur lokale Wohlgestelltheit für die Coupled Mode Gleichungen gezeigt. Globale Wohlgestelltheit konnten wir bisher nicht zeigen. Eine Argumentation über die Energie der Gleichungen wie in [AS18] funktioniert in unserem Fall nicht, um eine Aussage über die globale Wohlgestelltheit treffen zu können.

4 Untersuchung der Dispersionsrelation für die Coupled Mode Gleichungen in 2D

4.1 Struktur der Coupled Mode Gleichungen in 2D

In dem vorherigen Kapitel haben wir bereits die Coupled Mode Gleichungen im eindimensionalen Fall hergeleitet und die effektiven Gleichungen im allgemeinen d -dimensionalen Fall beschrieben. Nun möchten wir den Spezialfall $d = 2$ genauer betrachten und Aussagen über die Struktur der Dispersionsrelation für die Coupled Mode Gleichungen treffen. Das Ziel dieser Untersuchungen ist es, für (3.7) in zwei Raumdimensionen einen Ansatz zu konstruieren, so dass die resultierenden effektiven Gleichungen für geeignete Koeffizienten eine spektrale Lücke des zugehörigen linearen örtlichen Operators aufweisen. So können wir exponentiell lokalisierte Wellen für die Coupled Mode Gleichungen erwarten. Hier unterscheidet sich unsere Arbeit von den Untersuchungen in [GMS08], da das resultierende effektive System dort keine spektrale Lücke für den korrespondierenden linearen Operator besitzt, so dass man keine lokalisierten Solitärwellen für das Amplitudensystem in [GMS08] erwarten kann.

Bemerkung 4.1. Die Untersuchungen und Ergebnisse dieses Kapitels finden sich in ähnlicher Form in [DW18]. Die Berechnungen und Vereinfachungen der Dispersionsrelationen wurden in dem folgenden Kapitel teilweise mit Maple durchgeführt.

Wir betrachten für Gleichung (3.7) Wellenpakete, die aus mehreren tragenden Blochwellen bestehen, welche sich mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit bewegen. Der Ansatz, der die Lösung von (3.7) in 2D approximieren soll, wird analog zu Kapitel 3.1 konstruiert und hat für N Moden, $N = 2, 3, 4$, die Form

$$u^{\text{app}}(x, t) := \varepsilon^{1/2} \sum_{j=1}^N A_j(\varepsilon x, \varepsilon t) p_j(x) e^{ik^{(j)} \cdot x} e^{-i\omega_0 t} \quad (4.1)$$

mit den Einhüllenden A_1, \dots, A_N und gleicher Skalierung in Zeit und Raum. Wir definieren $X := \varepsilon x$ und $T := \varepsilon t$. Die Funktionen p_j sind die Eigenfunktionen aus dem Blocheigenwertproblem, also die Blochfunktionen zu den Punkten $(\omega_0, k^{(j)})$, $j = 1, \dots, N$ der Bandstruktur, wobei $\omega_0 := \omega_{n_0}(k^{(j)})$. Das heißt, wir definieren

$$p_j(x) := p_{n_0}(x, k^{(j)}) \quad (4.2)$$

für $j = 1, \dots, N$.

Für die Suche nach (exponentiell) lokalisierten Lösungen benötigen wir für die Dispersionsrelation der effektiven Gleichungen eine Struktur, die zwei Eigenschaften erfüllt. Der Graph der Dispersionsrelation $\Omega = \Omega(K)$ soll erstens eine spektrale Lücke aufweisen (E1), da wir lokalisierte Lösungen gerade in solch einer Lücke erwarten, siehe Kapitel 1.1. Die Lücke soll weiter durch ein isoliertes Extremum für das spektrale Band (Ω, K) begrenzt sein (E2). Dabei beschreibt Ω die Frequenz und K den Wellenvektor für das effektive System. Die letzte Eigenschaft benötigen wir aufgrund unseres asymptotischen Zuganges. In der Nähe des spektralen Randes setzen wir $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1$ und approximieren die Dispersionsrelation durch eine Taylorentwicklung im isolierten Extremum (siehe Kapitel 5.1). Damit zeigen wir die Verzweigung von lokalisierten Lösungen vom spektralen Rand.

Wir stellen uns die Frage, aus wievielen Blochmoden der Ansatz konstruiert werden muss, um die oben genannten Anforderungen (E1) und (E2) zu erfüllen. Wir versuchen zunächst, den Ansatz aus Kapitel 3.1 für den zweidimensionalen Fall zu übernehmen.

Ansatz aus zwei Moden

Analog zum eindimensionalen Fall, lautet ein Ansatz aus zwei Blochmoden

$$u_2^{\text{app}}(x, t) := \varepsilon^{1/2} \left(A_1(\varepsilon x, \varepsilon t) p_1(x) e^{ik^{(1)} \cdot x} + A_2(\varepsilon x, \varepsilon t) p_2(x) e^{ik^{(2)} \cdot x} \right) e^{-i\omega_0 t}, \quad (4.3)$$

wobei $k^{(1)}$ und $k^{(2)}$ zunächst einmal beliebig in \mathbb{B} sind. Die Blochfunktionen p_1 und p_2 sind wie in (4.2) definiert. Ähnlich wie in einer Raumdimension ist es hier für die Existenz einer spektralen Lücke in den effektiven Gleichungen nötig, dass sie lineare Kopplungsterme enthalten. Wir berechnen das Residuum von (4.3) für (3.7) und sammeln Terme gleicher Ordnung in ε , so wie wir es in 1D getan haben. Aufgrund der Eigenwertgleichung fallen die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ wiederum weg. In der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ haben wir nach Multiplikation mit $e^{i\omega_0 t}$ die Terme

$$\begin{aligned} & \left[i \left(p_1 \partial_T A_1 + 2(k_1^{(1)} p_1 - i \partial_{x_1} p_1) \partial_{X_1} A_1 + 2(k_2^{(1)} p_1 - i \partial_{x_2} p_1) \partial_{X_2} A_1 \right) \right. \\ & - \sigma(x) \left(|p_1|^2 |A_1|^2 + 2|p_2|^2 |A_2|^2 \right) p_1 A_1 - W(x) p_1 A_1 \left. \right] e^{ik^{(1)} \cdot x} \\ & + \left[i \left(p_2 \partial_T A_2 + 2(k_1^{(2)} p_2 - i \partial_{x_1} p_2) \partial_{X_1} A_2 + 2(k_2^{(2)} p_2 - i \partial_{x_2} p_2) \partial_{X_2} A_2 \right) \right. \\ & - \sigma(x) \left(2|p_1|^2 |A_1|^2 + |p_2|^2 |A_2|^2 \right) p_2 A_2 - W(x) p_2 A_2 \left. \right] e^{ik^{(2)} \cdot x} \\ & - \sigma(x) \left(p_1^2 \bar{p}_2 A_1^2 \bar{A}_2 e^{i(2k^{(1)} - k^{(2)}) \cdot x} + p_2^2 \bar{p}_1 A_2^2 \bar{A}_1 e^{i(2k^{(2)} - k^{(1)}) \cdot x} \right). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Um die effektiven Gleichungen zu erhalten, sammeln wir in einer Gleichung die Terme, die proportional zu $e^{ik^{(1)} \cdot x} P(x)$ und in der zweiten Gleichung Terme, die proportional zu $e^{ik^{(2)} \cdot x} P(x)$ sind, wobei $P(x)$ eine $2\pi\mathbb{Z}^d$ -periodische Funktion ist. Dafür multiplizieren wir mit $p_j(x) e^{ik^{(j)} \cdot x}$, $j = 1, 2$ und integrieren über \mathbb{T} . Bei den meisten Termen des Residuums sind die Proportionalitäten sofort zu erkennen.

Die Kopplungsterme entstehen durch eine bestimmte Wahl des Potentials W . Ein Beispiel für ein solches Potential ist

$$W(x) = a \cos \left(\left(k^{(1)} - k^{(2)} \right) \cdot x \right).$$

Warum gerade dieses Potential geeignet ist, werden wir anhand des folgenden Beispiels sehen.

Wir wählen den Term $W p_1 A_1 e^{ik^{(1)} \cdot x}$ aus (4.4) und multiplizieren ihn mit $\overline{p_2(x)} e^{-ik^{(2)} \cdot x}$. Dann integrieren wir über \mathbb{T} und erhalten

$$\begin{aligned} A_1 \int_{\mathbb{T}} W p_1 e^{ik^{(1)} \cdot x} \overline{p_2} e^{-ik^{(2)} \cdot x} dx &= A_1 \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{a}{2} e^{i(k^{(2)} - k^{(1)}) \cdot x} p_1(x) e^{ik^{(1)} \cdot x} \overline{p_2}(x) e^{-ik^{(2)} \cdot x} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{T}} \frac{a}{2} e^{i(k^{(1)} - k^{(2)}) \cdot x} p_1(x) e^{ik^{(1)} \cdot x} \overline{p_2}(x) e^{-ik^{(2)} \cdot x} dx \right) \\ &= A_1 \left(\int_{\mathbb{T}} \frac{a}{2} p_1(x) \overline{p_2}(x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{T}} \frac{a}{2} p_1(x) \overline{p_2}(x) e^{2i(k^{(1)} - k^{(2)}) \cdot x} dx \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Damit erhalten wir in der zweiten Gleichung von System (4.6) den Koeffizienten

$$\overline{\kappa_{12}} = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{T}} p_1(x) \overline{p_2}(x) dx + \delta \frac{a}{2} \int_{\mathbb{T}} p_1(x) \overline{p_2}(x) e^{2i(k^{(1)} - k^{(2)}) \cdot x} dx$$

für A_1 mit

$$\delta := \begin{cases} 0, & \text{wenn } k^{(1)} - k^{(2)} \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d \\ 1, & \text{wenn } k^{(1)} - k^{(2)} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

Da in dem zweiten Ausdruck von (4.5) der Term $e^{i(2k^{(1)} - 2k^{(2)}) \cdot x}$ für $k^{(1)} \neq k^{(2)}$ stehen bleibt, sehen wir, dass der entsprechende Term $W(x) p_1 A_1 e^{ik^{(1)} \cdot x}$ aus dem Residuum (4.4) nicht proportional zu $e^{ik^{(2)} \cdot x}$ ist. Deshalb liefert dieser Teil keinen Beitrag zur zweiten Gleichung von (4.6), außer es gilt $k^{(1)} = k^{(2)}$. Nach Berechnung der restlichen Koeffizienten lauten die effektiven Gleichungen für einen Ansatz aus zwei Moden

$$\begin{aligned} i \left(\partial_T A_1 + v_g^{(1)} \cdot \nabla A_1 \right) + \kappa_{11} A_1 + \kappa_{12} A_2 + (\alpha |A_1|^2 + 2\beta |A_2|^2) A_1 + \delta \phi A_2 \overline{A_1} &= 0 \\ i \left(\partial_T A_2 + v_g^{(2)} \cdot \nabla A_2 \right) + \overline{\kappa_{12}} A_1 + \kappa_{22} A_2 + (\gamma |A_2|^2 + 2\beta |A_1|^2) A_2 + \delta \overline{\phi} A_1^2 \overline{A_2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

mit

$$\begin{aligned} v_g^{(j)} &= -2 \langle (\nabla + ik^{(j)}) p_j, p_j \rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \quad j = 1, 2, \\ \kappa_{jj} &= \delta a \int_{\mathbb{T}} |p_j(x)|^2 \cos \left(2(k^{(2)} - k^{(1)}) \cdot x \right) dx, \quad j = 1, 2, \\ \kappa_{12} &= \frac{a}{2} \int_{\mathbb{T}} p_2(x) \overline{p_1}(x) dx + \delta \frac{a}{2} \int_{\mathbb{T}} p_2(x) \overline{p_1}(x) e^{2i(k^{(2)} - k^{(1)}) \cdot x} dx, \\ \alpha &= - \int_{\mathbb{T}} \sigma(x) |p_1|^4 dx, \quad \beta = - \int_{\mathbb{T}} \sigma(x) |p_1|^2 |p_2|^2 dx, \quad \gamma = - \int_{\mathbb{T}} \sigma(x) |p_2|^4 dx, \\ \phi &= - \int_{\mathbb{T}} \sigma(x) p_2^2 \overline{p_1}^2 e^{2i(k^{(2)} - k^{(1)}) \cdot x} dx. \end{aligned}$$

Bemerkung 4.2. Die obigen κ -Koeffizienten wurden hier für das konkrete Beispiel von $W(x) = a \cos \left((k^{(1)} - k^{(2)}) \cdot x \right)$ berechnet. System (4.6) gilt allerdings für allgemeine $W(x)$ der Form (3.8). Für die entsprechenden κ -Koeffizienten verweisen wir auf (3.11) mit $d = 2$. Die folgende Betrachtung der Dispersionsrelation gilt allgemein.

Nun wollen wir die Struktur der Dispersionsrelation von (4.6) auf die oben genannten Eigenschaften (E1) und (E2) untersuchen. Wir berechnen diese aus dem linearen Teil der effektiven Gleichungen durch

$$D(\Omega, K) = \det \begin{pmatrix} \Omega - v_g^{(1)} \cdot K + \kappa_{11} & \kappa_{12} \\ \overline{\kappa_{12}} & \Omega - v_g^{(2)} \cdot K + \kappa_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} & \Omega^2 - \Omega(v_g^{(1)} \cdot K + v_g^{(2)} \cdot K - \kappa_{11} - \kappa_{22}) + (v_g^{(1)} \cdot K) (v_g^{(2)} \cdot K) \\ & - (v_g^{(1)} \cdot K) \kappa_{22} - (v_g^{(2)} \cdot K) \kappa_{11} + \kappa_{11} \kappa_{22} - |\kappa_{12}|^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Wurzeln von $D(\Omega, K)$ definieren die lineare Dispersionsrelation $\Omega = \Omega(K)$. Sie lautet

$$\begin{aligned} \Omega(K) = & \frac{v_g^{(1)} \cdot K + v_g^{(2)} \cdot K - \kappa_{11} - \kappa_{22}}{2} \pm \left(\left(\frac{v_g^{(1)} \cdot K + v_g^{(2)} \cdot K - \kappa_{11} - \kappa_{22}}{2} \right)^2 \right. \\ & \left. - (v_g^{(1)} \cdot K) (v_g^{(2)} \cdot K) + \kappa_{22} v_g^{(1)} \cdot K + \kappa_{11} v_g^{(2)} \cdot K - \kappa_{11} \kappa_{22} + |\kappa_{12}|^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Bemerkung 4.3. Für den Spezialfall mit $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 0$ gilt: Falls $v_g^{(1)} \cdot K = 0$ oder $v_g^{(2)} \cdot K = 0$ und $v_g^{(1)} = -\alpha v_g^{(2)}$, dann ist $v_g^{(1)} \cdot K = v_g^{(2)} \cdot K = 0$ und mit (4.8) gilt

$$\Omega = \pm |\kappa_{12}|.$$

Wir zeigen, dass eine spektrale Lücke nur existiert, falls $v_g^{(1)}$ und $v_g^{(2)}$ linear abhängig sind und in entgegengesetzte Richtungen zeigen.

Die Nichtexistenz einer Lücke ist äquivalent zur Lösbarkeit von (4.7) bezüglich K . Dafür schreiben wir $K = \rho j$ mit $\rho \in \mathbb{R}$ und $j \in \mathbb{R}^2, |j| = 1$. Es gibt keine Lücke genau dann, wenn es für jedes $\Omega \in \mathbb{R}$ mindestens eine Richtung j gibt, für die wir die Gleichung nach ρ lösen können.

Wir setzen den neuen Ausdruck für K ein und stellen die Dispersionsrelation nach ρ um. Aus (4.7) folgt für $j \cdot v_g^{(1)} \neq 0$ und $j \cdot v_g^{(2)} \neq 0$

$$\begin{aligned} \rho^2 - & \frac{\rho \left(\Omega j \cdot (v_g^{(1)} + v_g^{(2)}) + j \cdot (\kappa_{11} v_g^{(2)} + \kappa_{22} v_g^{(1)}) \right)}{(j \cdot v_g^{(1)}) (j \cdot v_g^{(2)})} \\ & + \frac{\Omega^2 - \Omega(\kappa_{11} + \kappa_{22}) + \kappa_{11} \kappa_{22} - |\kappa_{12}|^2}{(j \cdot v_g^{(1)}) (j \cdot v_g^{(2)})} = 0. \end{aligned}$$

Dadurch erhalten wir als Bedingung an ρ , dass

$$\rho = \frac{\Omega j \cdot (v_g^{(1)} + v_g^{(2)}) + j \cdot (\kappa_{11} v_g^{(2)} + \kappa_{22} v_g^{(1)})}{2 (j \cdot v_g^{(1)}) (j \cdot v_g^{(2)})} \pm \frac{\sqrt{(j \cdot v_g^{(1)} (\Omega + \kappa_{22}) - j \cdot v_g^{(2)} (\Omega + \kappa_{11}))^2 + 4 |\kappa_{12}|^2 (j \cdot v_g^{(1)}) (j \cdot v_g^{(2)})}}{2 (j \cdot v_g^{(1)}) (j \cdot v_g^{(2)})}. \quad (4.9)$$

Nun schreiben wir den Ausdruck $j \cdot v_g^{(l)}$, $l = 1, 2$ mit Hilfe des Kosinus als $j \cdot v_g^{(1)} = |v_g^{(1)}| \cos(\theta)$ und $j \cdot v_g^{(2)} = |v_g^{(2)}| \cos(\phi)$, wobei $\theta, \phi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ein reelles ρ existiert genau dann, wenn

$$\left(|v_g^{(1)}| \cos(\theta) (\Omega + \kappa_{22}) - |v_g^{(2)}| \cos(\phi) (\Omega + \kappa_{11}) \right)^2 \geq -4 |\kappa_{12}|^2 |v_g^{(1)}| |v_g^{(2)}| \cos(\theta) \cos(\phi). \quad (4.10)$$

Wir unterscheiden die beiden Fälle

- (i) $\cos(\theta) = -\cos(\phi)$ (das heißt $v_g^{(1)} = -\alpha v_g^{(2)}$ mit $\alpha > 0$),
- (ii) $\cos(\theta) \neq -\cos(\phi)$.

Der Fall (i) vereinfacht sich (4.10) zu

$$\left(\Omega + \frac{\kappa_{22} |v_g^{(1)}| + \kappa_{11} |v_g^{(2)}|}{|v_g^{(1)}| + |v_g^{(2)}|} \right)^2 \geq 4 |\kappa_{12}|^2 \frac{|v_g^{(1)}| |v_g^{(2)}|}{(|v_g^{(1)}| + |v_g^{(2)}|)^2}. \quad (4.11)$$

Mit (4.11) erhalten wir für $v_g^{(1)} = -\alpha v_g^{(2)}$, $\alpha > 0$ die spektrale Lücke

$$\left(-\frac{\kappa_{22} |v_g^{(1)}| + \kappa_{11} |v_g^{(2)}|}{|v_g^{(1)}| + |v_g^{(2)}|} - 2 |\kappa_{12}| \frac{\sqrt{|v_g^{(1)}| |v_g^{(2)}|}}{|v_g^{(1)}| + |v_g^{(2)}|}, -\frac{\kappa_{22} |v_g^{(1)}| + \kappa_{11} |v_g^{(2)}|}{|v_g^{(1)}| + |v_g^{(2)}|} + 2 |\kappa_{12}| \frac{\sqrt{|v_g^{(1)}| |v_g^{(2)}|}}{|v_g^{(1)}| + |v_g^{(2)}|} \right). \quad (4.12)$$

Die Existenz einer Lücke wird wegen der stetigen Abhängigkeit der Lösung ρ von j durch die ausgeschlossenen Richtungen mit $j \cdot v_g^{(1)} = 0$ oder $j \cdot v_g^{(2)} = 0$ nicht geändert.

Der Fall (ii) tritt auf, wenn entweder $v_g^{(1)} = \alpha v_g^{(2)}$ mit $\alpha > 0$ gilt, oder wenn $v_g^{(1)}$ und $v_g^{(2)}$ linear unabhängig sind. Für $v_g^{(1)} = \alpha v_g^{(2)}$, $\alpha > 0$ gilt $\cos(\theta) = \cos(\phi)$ und aus (4.10) folgt, dass

$$\left(|v_g^{(1)}| \cos(\theta) (\Omega + \kappa_{22}) - |v_g^{(2)}| \cos(\theta) (\Omega + \kappa_{11}) \right)^2 \geq -4 |\kappa_{12}|^2 |v_g^{(1)}| |v_g^{(2)}| \cos(\theta)^2.$$

Diese Ungleichung ist immer erfüllt, da die linke Seite größer gleich Null ist und die rechte Seite nicht positiv.

Falls $\text{span}(v_g^{(1)}, v_g^{(2)}) = \mathbb{R}^2$, so können die Winkel θ und ϕ immer so gewählt werden, dass die rechte Seite von (4.10) nicht positiv und die Ungleichung erfüllt ist. Im zweiten Fall

existiert daher keine spektrale Lücke.

Wir haben gesehen, dass wir für eine spektrale Lücke, das heißt für Eigenschaft (E1), die Bedingung benötigen, dass

$$v_g^{(1)} = -\alpha v_g^{(2)} \quad (4.13)$$

mit $\alpha > 0$.

Oben haben wir bereits geschildert, dass wir für unseren asymptotischen Zugang eine weitere Eigenschaft des Graphen der Dispersionsrelation benötigen, nämlich ein isoliertes Extremum von $\Omega(K)$ an den Rändern (E2).

In dem hier betrachteten zweidimensionalen Fall mit einem Ansatz aus zwei Moden gibt es kein solches isoliertes Extremum für $\Omega(K)$, da Minimum und Maximum entlang einer Geraden parallel zur x_1 - x_2 -Ebene angenommen werden, siehe Abbildung 4.1. Dies folgt, wenn wir (4.13) in (4.9) einsetzen. Mit (4.12) sehen wir, dass die Wurzeln an beiden Rändern verschwinden und es ist

$$\rho = \frac{1}{2\alpha|v_g^{(2)}|\cos(\theta)} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1}(\kappa_{22} + \alpha\kappa_{11} \mp 2\sqrt{\alpha}|\kappa_{12}|) + \kappa_{11} - \alpha\kappa_{22} \right).$$

Wie man sieht spannen die Werte von $\rho(\theta)$ für $\theta \in [0, \pi/2]$ ein ganzes Intervall auf.

Wir haben gezeigt, dass ein Ansatz aus zwei Moden nicht zielführend ist, da Eigenschaft (E2) für die Dispersionsrelation nicht erfüllt ist. Daher wissen wir, dass der gesuchte Ansatz aus mindestens drei Moden konstruiert werden muss.

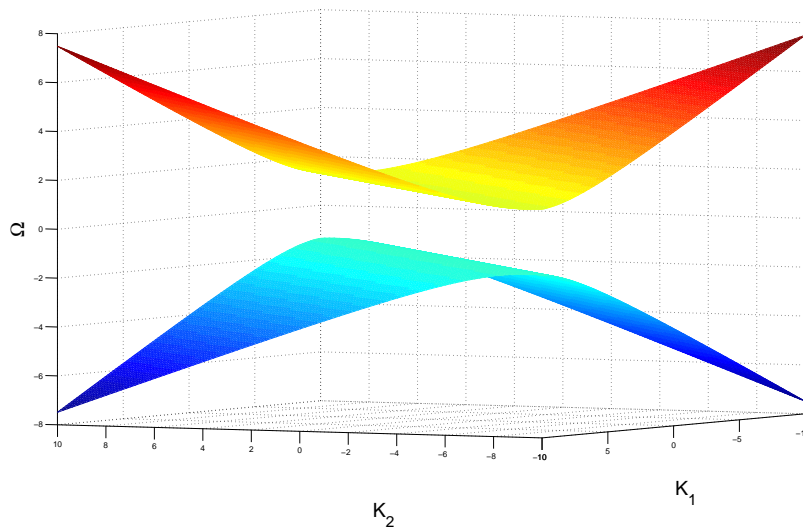


Abbildung 4.1: Dispersionsrelation für die Coupled Mode Gleichungen in zwei Dimensionen zum Ansatz aus zwei Moden mit $v_g^{(1)} = (1, 1)$, $v_g^{(2)} = (-1, -1)$, $\kappa_{11} = \kappa_{22} = 0$ und $\kappa_{12} = 1.5$.

Ansatz aus drei Moden

Nun wollen wir die Struktur der Dispersionsrelation für die effektiven Gleichungen zu einem Ansatz aus drei linear unabhängigen Moden auf der Frequenz ω_0 betrachten. Diesen konstruieren wir analog zu (4.3) durch

$$u_3^{\text{app}}(x, t) := \varepsilon^{1/2} \sum_{j=1}^3 A_j(\varepsilon x, \varepsilon t) p_j(x) e^{ik^{(j)} \cdot x} e^{-i\omega_0 t},$$

wobei die Blochfunktionen p_j für $j = 1, 2, 3$ wie in (4.2) definiert sind, $k^{(j)} \in \mathbb{B}$ für $j = 1, 2, 3$ und $\omega_0 := \omega_{n_0}(k^{(j)})$ für $j = 1, 2, 3$. Auch hier suchen wir wieder ein geeignetes Potential W , so dass lineare Kopplungsterme in den effektiven Gleichungen entstehen. Wir wählen das Potential $W(x)$ wie in (3.8) für $N = 3$ und erhalten die effektive Gleichungen

$$\begin{aligned} i \left(\partial_T A_1 + v_g^{(1)} \cdot \nabla A_1 \right) + \kappa_{11} A_1 + \kappa_{12} A_2 + \kappa_{13} A_3 + N_1(\vec{A}) &= 0 \\ i \left(\partial_T A_2 + v_g^{(2)} \cdot \nabla A_2 \right) + \overline{\kappa_{12}} A_1 + \kappa_{22} A_2 + \kappa_{23} A_3 + N_2(\vec{A}) &= 0 \\ i \left(\partial_T A_3 + v_g^{(3)} \cdot \nabla A_3 \right) + \overline{\kappa_{13}} A_1 + \overline{\kappa_{23}} A_2 + \kappa_{33} A_3 + N_3(\vec{A}) &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$v_g^{(j)} = -2 \langle (\nabla + ik^{(j)}) p_j, p_j \rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \quad j = 1, 2, 3$$

sowie κ_{jl} und N_j für $j, l = 1, 2, 3$ wie in (3.11). In diesem Fall lautet die Dispersionsrelation

$$D(\Omega, K) = \det \begin{pmatrix} \Omega - v_g^{(1)} \cdot K + \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \overline{\kappa_{12}} & \Omega - v_g^{(2)} \cdot K + \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \overline{\kappa_{13}} & \overline{\kappa_{23}} & \Omega - v_g^{(3)} \cdot K + \kappa_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

Damit erfüllt Ω die Gleichung

$$\begin{aligned} &\Omega^3 + \Omega^2 \left(\kappa_{33} - v_g^{(1)} \cdot K - v_g^{(2)} \cdot K - v_g^{(3)} \cdot K + \kappa_{11} + \kappa_{22} \right) \\ &+ \Omega \left((\kappa_{33} - v_g^{(2)} \cdot K - v_g^{(3)} \cdot K + \kappa_{22}) \kappa_{11} + (\kappa_{33} - v_g^{(1)} \cdot K - v_g^{(3)} \cdot K) \kappa_{22} \right. \\ &+ (-v_g^{(1)} \cdot K - v_g^{(2)} \cdot K) \kappa_{33} + (v_g^{(2)} \cdot K + v_g^{(3)} \cdot K) (v_g^{(1)} \cdot K) - \kappa_{23} \overline{\kappa_{23}} \\ &- \overline{\kappa_{13}} \kappa_{13} + (v_g^{(2)} \cdot K) (v_g^{(3)} \cdot K) - \overline{\kappa_{12}} \kappa_{12} \left. \right) + \left((\kappa_{33} - v_g^{(3)} \cdot K) \kappa_{22} - \kappa_{23} \overline{\kappa_{23}} \right. \\ &- (v_g^{(2)} \cdot K) \kappa_{33} + (v_g^{(2)} \cdot K) (v_g^{(3)} \cdot K) \left. \right) \kappa_{11} + (-\kappa_{13} \overline{\kappa_{13}} - \kappa_{33} (v_g^{(1)} \cdot K) \\ &+ (v_g^{(1)} \cdot K) (v_g^{(3)} \cdot K) \kappa_{22} + (-\kappa_{12} \overline{\kappa_{12}} + (v_g^{(1)} \cdot K) (v_g^{(2)} \cdot K)) \kappa_{33} + (\kappa_{23} \overline{\kappa_{23}} \\ &- (v_g^{(2)} \cdot K) (v_g^{(3)} \cdot K)) (v_g^{(1)} \cdot K) + \kappa_{12} \kappa_{23} \overline{\kappa_{13}} + \kappa_{13} \overline{\kappa_{13}} v_g^{(2)} \cdot K + \kappa_{13} \overline{\kappa_{12}} \kappa_{23} \\ &+ \kappa_{12} \overline{\kappa_{12}} (v_g^{(3)} \cdot K) = 0. \end{aligned}$$

Wir ersetzen wie im vorherigen Abschnitt K durch $\rho \cdot j$ mit $|j| = 1$, um zu sehen, ob wir die Gleichung für eine Richtung ρ lösen können. Es ist

$$\rho^3 \left(v_g^{(1)} \cdot j \right) \left(v_g^{(2)} \cdot j \right) \left(v_g^{(3)} \cdot j \right) + \rho^2 \nu_2 + \rho \nu_1 + \nu_0 = 0.$$

Die Koeffizienten ν_l , $l = 0, 1, 2$ sind reell für jedes $(\Omega, j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} \nu_0 = & -\Omega^3 - \Omega^2(\kappa_{11} + \kappa_{22} + \kappa_{33}) + \Omega(|\kappa_{12}|^2 + |\kappa_{13}|^2 + |\kappa_{23}|^2 - \kappa_{11}\kappa_{22} - \kappa_{11}\kappa_{33} - \kappa_{22}\kappa_{33}) \\ & - \kappa_{12}\overline{\kappa_{13}}\kappa_{23} - \overline{\kappa_{12}}\kappa_{13}\overline{\kappa_{23}} - \kappa_{11}\kappa_{22}\kappa_{33} + |\kappa_{12}|^2\kappa_{33} + |\kappa_{13}|^2\kappa_{22} + |\kappa_{23}|^2\kappa_{11}. \end{aligned}$$

Also haben wir für jede Richtung $j \in \mathbb{R}^2$, die nicht orthogonal zu einem $v_g^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$ ist, eine kubische Gleichung mit reellen Koeffizienten, welche immer mindestens eine reelle Lösung hat. Insgesamt umfasst das Spektrum von Ω der Dispersionsrelation in diesem Fall ganz \mathbb{R} , so dass keine spektrale Lücke existiert, siehe Abbildung 4.2.

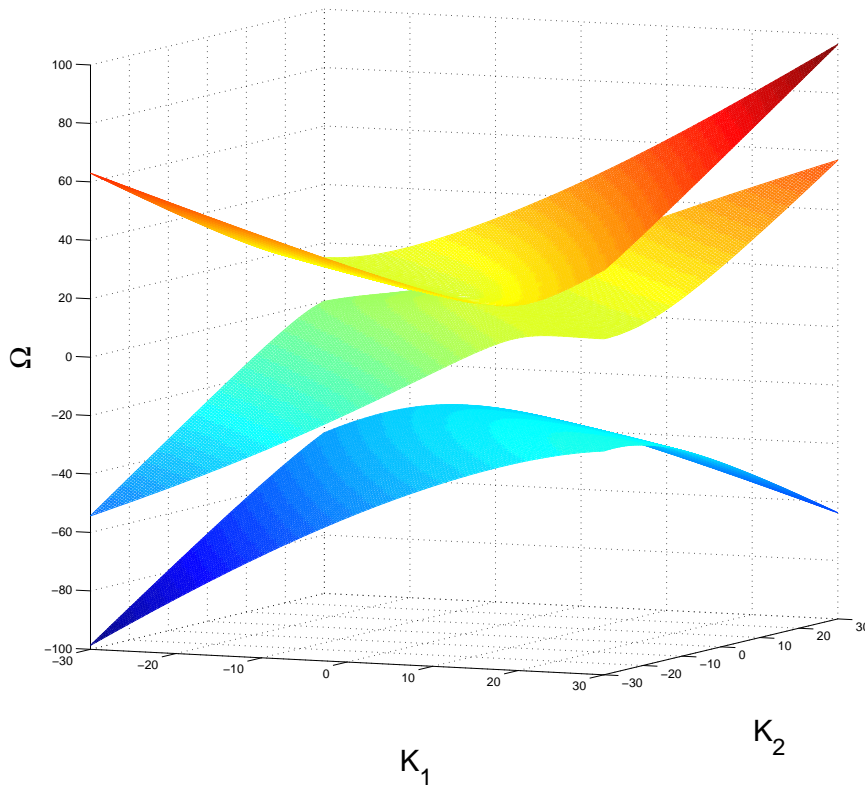


Abbildung 4.2: Dispersionsrelation für die Coupled Mode Gleichungen in zwei Dimensionen zum Ansatz aus drei Moden für $v_g^{(1)} = (1, 1)^T$, $v_g^{(2)} = (-1, 1)^T$, $v_g^{(3)} = (1, 2)^T$ und $\kappa_{11} = \kappa_{22} = \kappa_{33} = 0$, und $\kappa_{12} = \kappa_{13} = \kappa_{23} = 15$.

In diesem Fall ist schon Eigenschaft (E1) nicht erfüllt. Wir sehen also, dass auch ein Ansatz aus drei Moden in 2D ungeeignet ist, um exponentiell lokalisierte Lösungen für die effektiven Gleichungen zu finden.

Bemerkung 4.4. Es ist sogar so, dass es für jedes ungerade N keine spektrale Lücke in der Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen gibt. Die Dispersionsrelation ist die Determinante

$$D(\Omega, K) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \Omega - v_g^{(1)} \cdot K + \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1,N} \\ \overline{\kappa_{12}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \overline{\kappa_{1,N}} & \dots & & \Omega - v_g^{(N)} \cdot K + \kappa_{N,N} \end{pmatrix}}_{=:M} = 0$$

für $N = 2m + 1$, $m \in \mathbb{N}_0$. Nun ist aber die Matrix M hermitesch und es gilt, dass $\det(M) = \overline{\det(M^*)}$. Das heißt, die Dispersionsrelation ist für jedes K reell und wir haben in ρ eine polynomielle Gleichung ungeraden Grades mit reellen Koeffizienten, so dass es immer eine Lösung gibt.

Ansatz aus vier Moden

Wir kommen nun zu einem Wellenpaketansatz, welcher aus vier Moden konstruiert wird. Dieser liefert uns schließlich die gewünschten Eigenschaften in der Dispersionsrelation. Der Ansatz lautet entsprechend (4.1)

$$u^{\text{app}}(x, t) := \varepsilon^{1/2} \sum_{j=1}^4 A_j(\varepsilon x, \varepsilon t) p_j(x) e^{ik^{(j)} \cdot x} e^{-i\omega_0 t} \quad (4.14)$$

mit den Blochfunktionen p_j für $j = 1, \dots, 4$ wie in (4.2) definiert. Es beschreiben A_1, \dots, A_4 wieder die Einhüllenden. Die effektiven Gleichungen zu einem allgemeinen Potential W und Ansatz (4.14) sehen wie in (3.10) aus. Da es jedoch unser Ziel ist, ein Amplitudensystem mit bestimmten Eigenschaften zu erhalten, wählen wir ein möglichst einfaches Potential, welches lineare Kopplungen in den effektiven Gleichungen generiert. Eine mögliche Form für das Potential W ist

$$W(x) = a_1 \cos\left(2k_1^{(1)} x_1 + 2k_2^{(1)} x_2\right) + a_2 \cos\left(2k_1^{(1)} x_1\right) + a_3 \cos\left(2k_2^{(1)} x_2\right) \quad (4.15)$$

mit $a_1, a_2, a_3 \neq 0$. Um weiter die Notation zu vereinfachen, fordern wir für die Punkte $k^{(1)}, \dots, k^{(4)}$ die Symmetrien

$$k^{(1)} = \begin{pmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1^{(2)} \\ -k_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1^{(3)} \\ -k_2^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1^{(4)} \\ k_2^{(4)} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Durch die obige Wahl der Punkte $k^{(1)}, \dots, k^{(4)}$ gilt nach geeigneter Wahl der komplexen Phase, dass

$$p_2(x_1, x_2) = \overline{p_1}(x_1, x_2) = p_1(-x_1, -x_2)$$

und falls V gerade in x_1 und x_2 auch

$$\begin{aligned} p_3(x_1, x_2) &= p_1(x_1, -x_2) \\ p_4(x_1, x_2) &= p_3(-x_1, -x_2) = \overline{p_3}(x_1, x_2) = p_1(-x_1, x_2). \end{aligned}$$

Für die Berechnung der Koeffizienten von (4.17) nehmen wir diesen Fall einfachheit halber an. Für den allgemeinen Fall verweisen wir wieder auf (3.11).

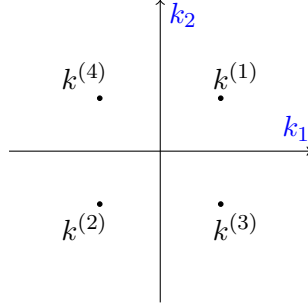


Abbildung 4.3: Beispielhafte Anordnung der Punkte $k^{(j)}$, $j = 1, \dots, 4$, so dass die Symmetrien in (4.16) erfüllt sind.

Bemerkung 4.5. Bei der Wahl der Punkte $k^{(j)}$ für $j = 1, \dots, 4$ müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Im ersten Fall $k^{(j)} \in \mathbb{B}$, $j = 1, \dots, 4$ liegen alle $k^{(j)}$ im Inneren der Brillouinzone. Hier sind die Symmetrien erfüllbar und wir erhalten einen Ansatz aus vier unterschiedlichen Moden. Sollte allerdings ein $k^{(j)}$ auf dem Rand der Brillouinzone liegen, so kann der Fall eintreten, dass es nur ein oder zwei unterschiedliche Punkte $k^{(j)}$ gibt. In diesem Fall benötigen wir in $k^{(j)}$ mehrfache Eigenwerte, um tatsächlich einen Ansatz aus vier verschiedenen Moden zu erhalten. Im Fall $k^{(1)} = \dots = k^{(4)}$ nehmen wir an, dass die zugehörigen Eigenfunktionen linear unabhängig sind.

Das Einsetzen von Ansatz (4.14) mit Bedingung (4.16) in Gleichung (3.7) für $d = 2$ mit W wie in (4.15) und das Sortieren der Terme nach ε -Potenzen liefert mit passenden quasi-periodischen Randbedingungen in der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$

$$\begin{aligned} & \left[i\partial_T A_1 p_1 e^{ik^{(1)} \cdot x} + i\partial_T A_2 p_2 e^{ik^{(2)} \cdot x} + i\partial_T A_3 p_3 e^{ik^{(3)} \cdot x} + i\partial_T A_4 p_4 e^{ik^{(4)} \cdot x} \right. \\ & + 2 \sum_{j=1}^4 \partial_{X_1} A_j \partial_{x_1} p_j e^{ik^{(j)} \cdot x} + 2 \sum_{j=1}^4 \partial_{X_2} A_j \partial_{x_2} p_j e^{ik^{(j)} \cdot x} \\ & - W(x) A_1 p_1 e^{ik^{(1)} \cdot x} - W(x) A_2 p_2 e^{ik^{(2)} \cdot x} - W(x) A_3 p_3 e^{ik^{(3)} \cdot x} - W(x) A_4 p_4 e^{ik^{(4)} \cdot x} \\ & \left. - \sigma |u^{\text{app}}|^2 u^{\text{app}} \right] e^{-i\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Für die Suche nach einer Dispersionsrelation, welche die Eigenschaften (E1) und (E2) erfüllt, betrachten wir $k^{(j)} \in \mathbb{B} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2$ für $j = 1, \dots, 4$.

Wir berechnen die Koeffizienten des effektiven Systems wie in Kapitel 4.1 und erhalten als

effektive Gleichungen die sogenannten Coupled Mode Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & i \left(\partial_T A_1 + v_g^{(1)} \cdot \nabla A_1 \right) + \alpha_1 A_2 + \alpha_3 A_3 + \alpha_2 A_4 + \left[\gamma_1 (|A_1|^2 + 2|A_2|^2) \right. \\
 & \quad \left. + 2\gamma_2 (|A_3|^2 + |A_4|^2) \right] A_1 + 2\gamma_2 A_3 A_4 \bar{A}_2 = 0 \\
 & i \left(\partial_T A_2 - v_g^{(1)} \cdot \nabla A_2 \right) + \bar{\alpha}_1 A_1 + \bar{\alpha}_2 A_3 + \bar{\alpha}_3 A_4 + \left[\gamma_1 (|A_2|^2 + 2|A_1|^2) \right. \\
 & \quad \left. + 2\gamma_2 (|A_3|^2 + |A_4|^2) \right] A_2 + 2\gamma_2 A_3 A_4 \bar{A}_1 = 0 \\
 & i \left(\partial_T A_3 + v_g^{(2)} \cdot \nabla A_3 \right) + \bar{\alpha}_3 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_1 A_4 + \left[\gamma_1 (|A_3|^2 + 2|A_4|^2) \right. \\
 & \quad \left. + 2\gamma_2 (|A_1|^2 + |A_2|^2) \right] A_3 + 2\gamma_2 A_1 A_2 \bar{A}_4 = 0 \\
 & i \left(\partial_T A_4 - v_g^{(2)} \cdot \nabla A_4 \right) + \bar{\alpha}_2 A_1 + \alpha_3 A_2 + \bar{\alpha}_1 A_3 + \left[\gamma_1 (|A_4|^2 + 2|A_3|^2) \right. \\
 & \quad \left. + 2\gamma_2 (|A_1|^2 + |A_2|^2) \right] A_4 + 2\gamma_2 A_1 A_2 \bar{A}_3 = 0
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
 v_g^{(1)} &= -2 \langle (\nabla + ik^{(1)}) p_1, p_1 \rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \\
 v_g^{(2)} &= -2 \langle (\nabla + ik^{(3)}) p_3, p_3 \rangle_{L^2(\mathbb{T})}, \\
 \alpha_1 &= - \sum_{\substack{m=-3 \\ k^{(2)} + q_m \in k^{(1)} + \mathbb{Z}^d}}^3 \frac{a_m}{2} \int_{\mathbb{T}} p_2(x) \bar{p}_1(x) e^{i(k^{(2)} + q_m - k^{(1)}) \cdot x} dx \\
 &= - \sum_{\substack{m=-3 \\ k^{(4)} + q_m \in k^{(3)} + \mathbb{Z}^d}}^3 \frac{a_m}{2} \int_{\mathbb{T}} p_4(x) \bar{p}_3(x) e^{i(k^{(4)} + q_m - k^{(3)}) \cdot x} dx, \\
 \alpha_2 &= - \sum_{\substack{m=-3 \\ k^{(4)} + q_m \in k^{(1)} + \mathbb{Z}^d}}^3 \frac{a_m}{2} \int_{\mathbb{T}} p_4(x) \bar{p}_1(x) e^{i(k^{(4)} + q_m - k^{(1)}) \cdot x} dx \\
 &= - \sum_{\substack{m=-3 \\ k^{(2)} + q_m \in k^{(3)} + \mathbb{Z}^d}}^3 \frac{a_m}{2} \int_{\mathbb{T}} p_2(x) \bar{p}_3(x) e^{i(k^{(2)} + q_m - k^{(3)}) \cdot x} dx, \\
 \alpha_3 &= - \sum_{\substack{m=-3 \\ k^{(3)} + q_m \in k^{(1)} + \mathbb{Z}^d}}^3 \frac{a_m}{2} \int_{\mathbb{T}} p_3(x) \bar{p}_1(x) e^{i(k^{(3)} + q_m - k^{(1)}) \cdot x} dx \\
 &= - \sum_{\substack{m=-3 \\ k^{(2)} + q_m \in k^{(3)} + \mathbb{Z}^d}}^3 \frac{a_m}{2} \int_{\mathbb{T}} p_2(x) \bar{p}_4(x) e^{i(k^{(2)} + q_m - k^{(4)}) \cdot x} dx, \\
 \gamma_1 &= - \int_{\mathbb{T}} \sigma |p_1|^4 dx = - \int_{\mathbb{T}} \sigma |p_2|^4 dx = - \int_{\mathbb{T}} \sigma |p_3|^4 dx = - \int_{\mathbb{T}} \sigma |p_4|^4 dx, \\
 \gamma_2 &= - \int_{\mathbb{T}} \sigma |p_2|^2 |p_1|^2 dx = - \int_{\mathbb{T}} \sigma |p_2|^2 |p_3|^2 dx,
 \end{aligned}$$

wobei für das in (4.15) definierte Potential $W(x)$ gilt, dass

$$q_1 = \begin{pmatrix} 2k_1^{(1)} \\ 2k_2^{(1)} \end{pmatrix}, \quad q_2 = \begin{pmatrix} 2k_1^{(1)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k_2^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Wir sehen in Abbildung 4.4, dass die Struktur der Dispersionsrelation für die oben gewählten Koeffizienten $v_g^{(j)}, j = 1, 2$ und $\alpha_l, l = 1, 2, 3$ die gewünschten Eigenschaften (E1) und (E2) hat.

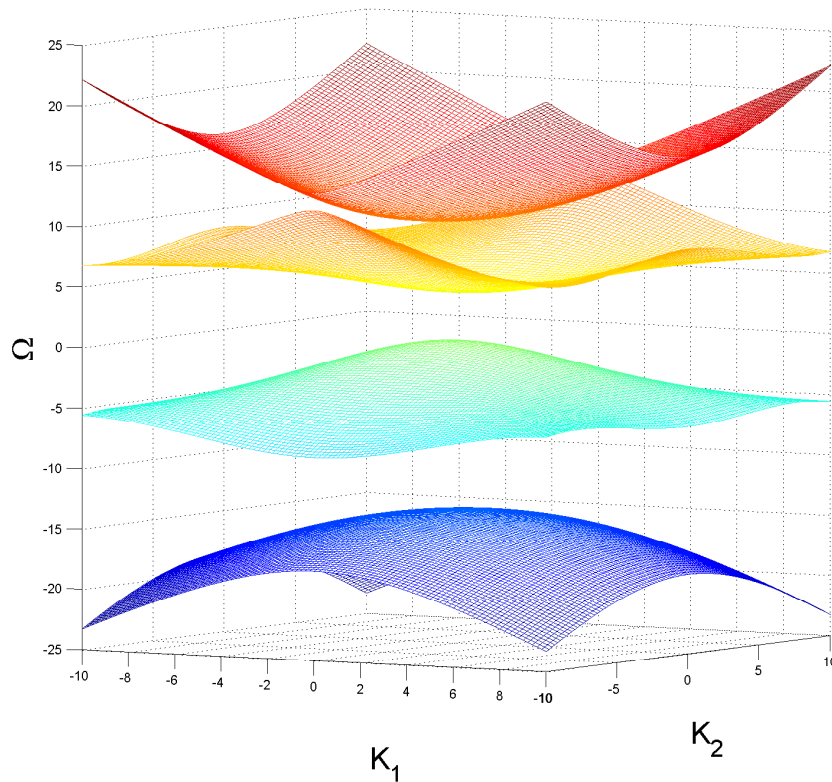


Abbildung 4.4: Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen für einen Ansatz mit vier Moden mit $v_g^{(1)} = (1, 1)^T, v_g^{(2)} = (1, -1)^T$ und $\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2$.

4.2 Existenz einer spektralen Lücke für die Coupled Mode Gleichungen in 2D

Jetzt möchten wir die Existenz einer spektralen Lücke für die Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen für Ansatz (4.14) rigoros beweisen.

Satz 4.6. Für System (4.17) existiert in der Dispersionsrelation $\Omega = \Omega(K)$ eine spektrale Lücke.

Beweis. Wir betrachten zunächst einen vereinfachten Fall $\alpha_1 = \overline{\alpha_1} := \alpha$ und $\alpha_2 = \overline{\alpha_2} = \alpha_3 = \overline{\alpha_3} := \beta$ in (4.17).

Der lineare Teil der Coupled Mode Gleichungen sieht dann wie folgt aus

$$\begin{aligned} i \left(\partial_T A_1 + v_{g,1}^{(1)} \partial_{X_1} A_1 + v_{g,2}^{(1)} \partial_{X_2} A_1 \right) + \alpha A_2 + \beta (A_3 + A_4) &= 0 \\ i \left(\partial_T A_2 - v_{g,1}^{(1)} \partial_{X_1} A_2 - v_{g,2}^{(1)} \partial_{X_2} A_2 \right) + \alpha A_1 + \beta (A_3 + A_4) &= 0 \\ i \left(\partial_T A_3 + v_{g,1}^{(2)} \partial_{X_1} A_3 + v_{g,2}^{(2)} \partial_{X_2} A_3 \right) + \beta (A_1 + A_2) + \alpha A_4 &= 0 \\ i \left(\partial_T A_4 - v_{g,1}^{(2)} \partial_{X_1} A_4 - v_{g,2}^{(2)} \partial_{X_2} A_4 \right) + \beta (A_1 + A_2) + \alpha A_3 &= 0. \end{aligned}$$

Der einfacheren Notation halber möchten wir mit einem System arbeiten, das die orthogonalen Gruppengeschwindigkeiten

$$\tilde{v}_g^{(1)} = (1, 0)^T \text{ und } \tilde{v}_g^{(2)} = (0, 1)^T \quad (4.18)$$

hat. Sollten Gruppengeschwindigkeiten $v_g^{(1)}, v_g^{(2)}$ gegeben sein, die linear unabhängig, aber nicht orthogonal sind, transformieren wir die Variablen entsprechend. Die neuen Variablen nennen wir

$$\xi = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \text{ und } \eta = \alpha_3 X_1 + \alpha_4 X_2.$$

Bemerkung 4.7. Dank der linearen Unabhängigkeit der $v_g^{(j)}$, $j = 1, 2$ sind nicht beide erste Komponenten von $v_g^{(1)}$ und $v_g^{(2)}$ Null. Das Gleiche gilt für die zweiten Komponenten von $\tilde{v}_g^{(1)}$ und $\tilde{v}_g^{(2)}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $v_{g_1}^{(1)} \neq 0$ und $v_{g_2}^{(2)} \neq 0$.

Nun ist mit $\xi = \xi(X_1, X_2)$ und $\eta = \eta(X_1, X_2)$

$$\partial_{X_1} A(\xi, \eta) = \alpha_1 \partial_\xi A(\xi, \eta) + \alpha_3 \partial_\eta A(\xi, \eta)$$

und

$$\partial_{X_2} A(\xi, \eta) = \alpha_2 \partial_\xi A(\xi, \eta) + \alpha_4 \partial_\eta A(\xi, \eta).$$

Wir möchten nun wegen (4.18), dass

$$\begin{aligned} v_{g_1}^{(1)} \partial_{X_1} + v_{g_2}^{(1)} \partial_{X_2} &= \partial_\xi \\ v_{g_1}^{(2)} \partial_{X_1} + v_{g_2}^{(2)} \partial_{X_2} &= \partial_\eta, \end{aligned}$$

gilt, was uns zu dem System

$$\begin{aligned} v_{g_1}^{(1)} (\alpha_1 \partial_\xi + \alpha_3 \partial_\eta) + v_{g_2}^{(1)} (\alpha_2 \partial_\xi + \alpha_4 \partial_\eta) &= \partial_\xi \\ v_{g_1}^{(2)} (\alpha_1 \partial_\xi + \alpha_3 \partial_\eta) + v_{g_2}^{(2)} (\alpha_2 \partial_\xi + \alpha_4 \partial_\eta) &= \partial_\eta \end{aligned}$$

führt, da die zweite und vierte Gleichung linear abhängig sind und wegfallen. Damit erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} v_g^{(1)} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix} \\ v_g^{(2)} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\xi \\ \partial_\eta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

weshalb gilt, dass

$$\begin{pmatrix} v_g^{(1)} \\ v_g^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} v_g^{(1)} \\ v_g^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da $v_g^{(1)}$ und $v_g^{(2)}$ linear unabhängig sind, ist die Matrix $\begin{pmatrix} v_g^{(1)} \\ v_g^{(2)} \end{pmatrix}$ invertierbar und die beiden Gleichungssysteme sind eindeutig lösbar. Mit der Variablentransformation erhalten wir aus (4.2) das System

$$\begin{aligned} i \left(\partial_T \tilde{A}_1 + \partial_\xi \tilde{A}_1 \right) + \alpha \tilde{A}_2 + \beta (\tilde{A}_3 + \tilde{A}_4) &= 0 \\ i \left(\partial_T \tilde{A}_2 - \partial_\xi \tilde{A}_2 \right) + \alpha \tilde{A}_1 + \beta (\tilde{A}_3 + \tilde{A}_4) &= 0 \\ i \left(\partial_T \tilde{A}_3 + \partial_\eta \tilde{A}_3 \right) + \beta (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) + \alpha \alpha_4 &= 0 \\ i \left(\partial_T \tilde{A}_4 - \partial_\eta \tilde{A}_4 \right) + \beta (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) + \alpha \alpha_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

mit $A(X_1, X_2) = \tilde{A}(\xi, \eta)$. Die lineare Dispersionsrelation $\Omega = \Omega(K_\xi, K_\eta)$ mit den Fourier Wellenzahlen (K_ξ, K_η) erhalten wir durch die Determinantengleichung von (4.19). Dann ist

$$\begin{aligned} D(\Omega, K_\xi, K_\eta) &= \det \begin{pmatrix} \Omega - K_\xi & \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & \Omega + K_\xi & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \Omega - K_\eta & \alpha \\ \beta & \beta & \alpha & \Omega + K_\eta \end{pmatrix} \\ &= (\Omega^2 - \alpha^2 - K_\xi^2)(\Omega^2 - \alpha^2 - K_\eta^2) - 4\beta^2(\Omega - \alpha)^2 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Reellwertige Wurzeln von $D(0, K_\xi, K_\eta)$ existieren für $\alpha^2 \leq 4\beta^2$, denn $D(0, K_\xi, K_\eta) = (\alpha^2 + K_\xi^2)(\alpha^2 + K_\eta^2) - 4\alpha^2\beta^2$. Das heißt, für $\alpha^2 > 4\beta^2$ hat die Dispersionsrelation in $\Omega = 0$ eine spektrale Lücke.

Nun wollen wir eine Bedingung für die Existenz einer Bandlücke für beliebige Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und für $\tilde{v}_g^{(1)} = (1, 0)^T, \tilde{v}_g^{(2)} = (0, 1)^T$ aufstellen. Nach der Variablentransformation haben wir hier

$$\begin{aligned} i \left(\partial_T \tilde{A}_1 + \partial_\xi \tilde{A}_1 \right) + \alpha_1 \tilde{A}_2 + \alpha_3 \tilde{A}_3 + \alpha_2 \tilde{A}_4 &= 0 \\ i \left(\partial_T \tilde{A}_2 - \partial_\xi \tilde{A}_2 \right) + \bar{\alpha}_1 \tilde{A}_1 + \bar{\alpha}_2 \tilde{A}_3 + \bar{\alpha}_3 \tilde{A}_4 &= 0 \\ i \left(\partial_T \tilde{A}_3 + \partial_\eta \tilde{A}_3 \right) + \bar{\alpha}_3 \tilde{A}_1 + \alpha_2 \tilde{A}_2 + \alpha_1 \tilde{A}_4 &= 0 \\ i \left(\partial_T \tilde{A}_4 - \partial_\eta \tilde{A}_4 \right) + \bar{\alpha}_2 \tilde{A}_1 + \alpha_3 \tilde{A}_2 + \bar{\alpha}_1 \tilde{A}_3 &= 0 \end{aligned}$$

und damit lautet die Dispersionsrelation

$$D(\Omega, K_\xi, K_\eta) = \det \begin{pmatrix} \Omega - K_\xi & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \overline{\alpha_1} & \Omega + K_\xi & \overline{\alpha_2} & \overline{\alpha_3} \\ \overline{\alpha_3} & \alpha_2 & \Omega - K_\eta & \alpha_1 \\ \overline{\alpha_2} & \alpha_3 & \overline{\alpha_1} & \Omega + K_\eta \end{pmatrix} = 0,$$

wobei (K_ξ, K_η) die duale Variable zu (ξ, η) bezeichnet. Die Dispersionsrelation lautet

$$\begin{aligned} & |\alpha_1|^4 + (K_\eta^2 - \overline{\alpha_3}^2 + K_\xi^2 - 2\Omega^2 - \alpha_3^2)|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^4 + (2K_\xi K_\eta - 2\Omega^2 - 2|\alpha_3|^2)|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^4 \\ & - (2K_\xi K_\eta + 2\Omega^2)|\alpha_3|^2 - \overline{\alpha_1}^2 \alpha_2^2 + 2\Omega \alpha_2 (\overline{\alpha_3} + \alpha_3) \overline{\alpha_1} - \overline{\alpha_2}^2 \alpha_1^2 + 2\Omega \alpha_1 (\overline{\alpha_3} + \alpha_3) \overline{\alpha_2} + \Omega^4 \\ & - (K_\xi^2 + K_\eta^2)\Omega^2 + K_\xi^2 K_\eta^2 = 0. \end{aligned}$$

Wir vereinfachen die Gleichung zu

$$\begin{aligned} & \Omega^4 - \Omega^2(K_\xi^2 + K_\eta^2 + 2(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2)) + 4\Omega(\operatorname{Re}(\overline{\alpha_1}\alpha_2\alpha_3) + \operatorname{Re}(\alpha_1\overline{\alpha_2}\alpha_3)) \\ & + (K_\xi K_\eta + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2)^2 + |\alpha_1|^2(K_\xi^2 + K_\eta^2 + |\alpha_1|^2) = 2\operatorname{Re}(|\alpha_1|^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\overline{\alpha_1}^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Dabei bezeichnet Re den Realteil. Die linke Seite der Gleichung ist für $\Omega = 0$ und $K_\xi, K_\eta \in \mathbb{R}^2$ größer gleich $|\alpha_1|^4$. Die rechte Seite ist kleiner gleich $2|\alpha_1|^2(|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2)$. Das heißt, es gibt keine reelle Lösung (K_ξ, K_η) , wenn $|\alpha_1|^2 \geq 2(|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2)$. Daher existiert eine spektrale Lücke um $\Omega = 0$, wenn

$$|\alpha_1|^2 \geq 2(|\alpha_2|^2 + |\alpha_3|^2). \quad (4.21)$$

Bemerkung 4.8. Eine Konstellation, welche diese Bedingung erfüllt, lautet zum Beispiel $\alpha_1 = 7, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 2$, siehe Abbildung 4.4.

Insgesamt konnten wir zeigen, dass in der Dispersionsrelation zum Ansatz aus vier Moden eine spektrale Lücke existiert und wir haben einen Kandidaten für die Approximation einer lokalisierten Lösung von (3.7) gefunden.

Bemerkung 4.9. Die Struktur der Coupled Mode Gleichungen und die Existenz einer spektralen Lücke für den jeweiligen räumlichen Operator verhält sich im d -dimensionalen Fall für $N = 2, 3, 4$ genau wie oben beschrieben [DW18].

Deutlich schwieriger ist es, eine Bedingung für die Existenz einer spektralen Lücke für Gleichungen, resultierend aus einem Ansatz mit mehr als vier Moden in d Dimensionen, aufzustellen. In dem folgenden Kapitel konzentrieren wir uns deshalb auf die Coupled Mode Gleichungen im zweidimensionalen Fall, resultierend aus einem Ansatz aus vier Moden.

□

5 Lokalisierte Lösungen der Coupled Mode Gleichungen in 2D

Wie in der Einleitung beschrieben, interessieren wir uns für lokalisierte Solitärwellen der Coupled Mode Gleichungen als Approximation von lokalisierten Wellenpaketen über die Einhüllenden A_j . Deshalb wollen wir uns in diesem Kapitel genauer mit der Asymptotik für (4.17) beschäftigen. Liegt Ω nicht im Spektrum des Operators $L(\nabla)$, siehe (5.2), jedoch asymptotisch nah am spektralen Rand, so ist eine Approximation durch die nichtlineare Schrödingergleichung (NLS) möglich.

Für diese asymptotische Näherung benötigen wir, dass die Dispersionsrelation lokal, das heißt nah am spektralen Rand, vom parabolischen Typ ist. Mit Hilfe dieser Asymptotik können wir die numerische Suche nach lokalisierten Lösungen beginnen, welche in dem folgenden Abschnitt beschrieben wird. Schließlich werden wir darauf aufbauend die Existenz von lokalisierten Solitärwellen für die Coupled Mode Gleichungen beweisen.

5.1 Asymptotik

Die Coupled Mode Gleichungen (4.17) für $N = 4$ und $d = 2$ aus Kapitel 4.1 können wir mit $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3, A_4)^T$ kompakt schreiben als

$$i\partial_T \vec{A} - L(\nabla)(\vec{A}) + \vec{N}(\vec{A}) = 0 \quad (5.1)$$

mit

$$L(\nabla) = \begin{pmatrix} -iv_{g_1} \cdot \nabla & & & 0 \\ & iv_{g_1} \cdot \nabla & & \\ & & -iv_{g_2} \cdot \nabla & \\ 0 & & & iv_{g_2} \cdot \nabla \end{pmatrix} - M_\alpha, \quad M_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \overline{\alpha_1} & 0 & \overline{\alpha_2} & \overline{\alpha_3} \\ \overline{\alpha_3} & \alpha_2 & 0 & \alpha_1 \\ \overline{\alpha_2} & \alpha_3 & \overline{\alpha_1} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

und $\vec{N}(\vec{A}) = (N_1(\vec{A}), N_2(\vec{A}), N_3(\vec{A}), N_4(\vec{A}))^T$, wobei

$$\begin{aligned}
 N_1(\vec{A}) &= \left[\gamma_1 (|A_1|^2 + 2|A_2|^2) + 2\gamma_2 (|A_3|^2 + |A_4|^2) \right] A_1 + 2\gamma_2 A_3 A_4 \bar{A}_2 \\
 N_2(\vec{A}) &= \left[\gamma_1 (|A_2|^2 + 2|A_1|^2) + 2\gamma_2 (|A_3|^2 + |A_4|^2) \right] A_2 + 2\gamma_2 A_3 A_4 \bar{A}_1 \\
 N_3(\vec{A}) &= \left[\gamma_1 (|A_3|^2 + 2|A_4|^2) + 2\gamma_2 (|A_1|^2 + |A_2|^2) \right] A_3 + 2\gamma_2 A_1 A_2 \bar{A}_4 \\
 N_4(\vec{A}) &= \left[\gamma_1 (|A_4|^2 + 2|A_3|^2) + 2\gamma_2 (|A_1|^2 + |A_2|^2) \right] A_4 + 2\gamma_2 A_1 A_2 \bar{A}_3. \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Stehende Solitärwellen haben die Form $\vec{A}(X, T) = \vec{B}(X)e^{-i\Omega T}$ mit $\vec{B} = (B_1, B_2, B_3, B_4)^T$. Mit (5.1) erhalten wir die Gleichung

$$\Omega \vec{B} - L(\nabla) \vec{B} + \vec{N}(\vec{B}) = 0. \quad (5.4)$$

Die Eigenwertgleichung in Fouriervariablen

$$\Omega(K) \vec{\eta}(K) = L(iK) \vec{\eta}(K)$$

liefert die vier Eigenpaare $(\Omega_j(K), \vec{\eta}^{(j)}(K))$, $j \in \{1, \dots, 4\}$ mit $\Omega_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und den Eigenfunktionen $\vec{\eta}^{(j)} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $\|\vec{\eta}^{(j)}(K)\|_{l^2(\mathbb{R}^4)} = 1 \forall K$ mit

$$L(iK) = \begin{pmatrix} v_{g_1} \cdot K & & & 0 \\ & -v_{g_1} \cdot K & & \\ & & v_{g_2} \cdot K & \\ 0 & & & -v_{g_2} \cdot K \end{pmatrix} - M_\alpha. \quad (5.5)$$

Mit Ω_0 bezeichnen wir einen spektralen Rand, das heißt $\Omega_0 \in \partial(\text{spec}(L(\nabla)))$. Für ein festes $j_0 \in \{1, \dots, 4\}$ ist $\Omega_{j_0}(0) = \Omega_0$ und es gilt $\nabla \Omega_{j_0}(0) = 0$, da der Rand ein Extremwert von Ω_{j_0} ist.

Wir suchen lokalisierte Lösungen in der spektralen Lücke für die Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen, das heißt in

$$(-\Omega_0, \Omega_0) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^4 \Omega_j(\mathbb{R}).$$

Unser Ansatz für Gap Solitone für Ω nahe dem spektralen Rand $\Omega = \Omega_0$ lautet mit $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1$

$$\vec{B}_{\text{app}} = \varepsilon C(\varepsilon X) \vec{\eta}^{(j_0)}(X), \quad (5.6)$$

das heißt wir nutzen den langsam variierenden Einhüllendenansatz $\varepsilon C(\varepsilon X)$, wobei das Skalar $\Omega_1 = \mathcal{O}(1)$ ist und $C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ noch zu bestimmen ist.

Bemerkung 5.1. In der Einhüllendenapproximation moduliert die Einhüllende $\varepsilon C(\varepsilon X)$ die ebene Welle $e^{iK_0 \cdot X} \vec{\eta}^{(j_0)}(K_0)$. Aufgrund der einfacheren Notation nehmen wir an, dass $K_0 = 0$ gilt. Andernfalls würde man mit Verschiebungen arbeiten und später $\frac{K-K_0}{\varepsilon} =: \kappa$ definieren.

Wir treffen für die Asymptotik drei grundlegende Annahmen:

- (i) $\Omega_{j_0}(K)$ ist einfacher Eigenwert für alle K in der Nähe der Null.
- (ii) Die Hessische $D^2\Omega_{j_0}(0)$ ist definit.
- (iii) $|\Omega_{j_0}(K) - \Omega_0 - \frac{1}{2}K^T D^2\Omega_{j_0}(0)K| \leq c|K|^3$ für ein $c > 0$ und alle K in der Nähe von Null.

Annahme (ii) liefert uns, dass das Extremum von $\Omega_{j_0}(K)$ in $K = 0$ isoliert ist.

Bemerkung 5.2. Wir haben in Kapitel 4.1 für ein Beispiel von Coupled Mode Gleichungen mit $N = 4$ und $d = 2$ gezeigt, dass die Annahmen (i)-(iii) erfüllt sind.

Im Fourierraum haben wir

$$\begin{aligned}\hat{\vec{B}}_{\text{app}}(K) &= \varepsilon\varepsilon^{-2}\hat{C}\left(\frac{K}{\varepsilon}\right)\bar{\eta}^{(j_0)}(K) \\ &= \varepsilon^{-1}\hat{C}(\kappa)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa) \text{ mit } \kappa := \varepsilon^{-1}K\end{aligned}$$

und $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2\Omega_1$. Die Fouriertransformierte der Nichtlinearität in \vec{B}_{app} lautet

$$\mathcal{F}\left(\vec{N}\left(\vec{B}_{\text{app}}\right)\right)(\varepsilon\kappa) = \sum_{j=1}^4 \gamma_j(\varepsilon\kappa)\bar{\eta}^{(j)}(\varepsilon\kappa), \quad \gamma_j = \langle \vec{N}(\vec{B}_{\text{app}}), \bar{\eta}^{(j)} \rangle_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Wir berechnen das Residuum für den oben definierten Ansatz und betrachten alle Terme, die proportional zu $\bar{\eta}^{(j_0)}$ sind, nämlich

$$R_{j_0} := (\Omega_0 + \varepsilon^2\Omega_1) \varepsilon^{-1}\hat{C}(\kappa)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa) + \gamma^{(j_0)}\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa) - L(\varepsilon\kappa)\varepsilon^{-1}\hat{C}(K)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa)$$

mit $\gamma^{(j_0)} = \bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa)^T \hat{N}(\vec{B}_{\text{app}})\kappa$. Mit der Eigenwertgleichung ist

$$L(\varepsilon\kappa)\varepsilon^{-1}\hat{C}(\kappa)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa) = \Omega_{j_0}(\varepsilon\kappa)\varepsilon^{-1}\hat{C}(\kappa)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa),$$

wobei der Ausdruck $\Omega_{j_0}(\varepsilon\kappa)$ um den Punkt 0 taylorentwickelt wird, das heißt

$$\Omega_{j_0}(\varepsilon\kappa) = \Omega_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}\kappa^T D^2\Omega_{j_0}(0)\kappa + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

wegen $\nabla\Omega_{j_0}(0) = 0$ und $\Omega_{j_0}(0) = \Omega_0$ nach Annahme. Damit ist

$$\begin{aligned}R_{j_0} &= (\Omega_0 + \varepsilon^2\Omega_1) \varepsilon^{-1}\hat{C}(\kappa)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa) + \gamma^{(j_0)}\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa) \\ &\quad - \left(\Omega_0 + \frac{\varepsilon^2}{2}\kappa^T D^2\Omega_{j_0}(0)\kappa + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\right) \varepsilon^{-1}\hat{C}(\kappa)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa).\end{aligned}$$

Das Sortieren der Terme im Residuum, welche proportional zu $\bar{\eta}^{(j_0)}$ sind, liefert in der niedrigsten Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon)$, den Ausdruck

$$\Omega_1\hat{C}(\kappa)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa) - \frac{1}{2}(\kappa^T D^2\Omega_{j_0}(0)\kappa)\hat{C}(\kappa)\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa) + \gamma_{j_0}\bar{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon\kappa).$$

Um das Residuum klein zu bekommen, setzen wir

$$\Omega_1 \hat{C}(\kappa) - \frac{1}{2} (\kappa^T D^2 \Omega_{j_0}(0) \kappa) \hat{C}(\kappa) + \gamma^{(j_0)}(\kappa) = 0, \kappa \in \mathbb{R}^2$$

und transformieren diese Gleichung aus dem Fourierraum zurück. Indem wir in $\gamma^{(j_0)}$ den Vektor $\vec{\eta}^{(j_0)}(\varepsilon \kappa)$ durch $\vec{\eta}^{(j_0)}(0)$ ersetzen, erhalten wir formal die effektive Gleichung

$$\Omega_1 C + \frac{1}{2} \nabla^T D^2 \Omega_{j_0}(0) \nabla C + \Gamma |C|^2 C = 0, \quad (5.7)$$

mit $\Gamma := \vec{\eta}^{(j_0)}(0)^T \vec{N}(\vec{\eta}^{(j_0)}(0))$. Im Residuum erzeugt das Ersetzen der Terme in $\gamma^{(j_0)}$ ausschließlich Terme höherer Ordnung.

Gleichung (5.7) ist eine Verallgemeinerung der nichtlinearen Schrödingergleichungen, welche äquivalent zur NLS ist, falls die Matrix $D^2 \Omega_{j_0}$ diagonal ist.

Über die nichtlineare Schrödingergleichung wissen wir, dass eine explizite Familie von Lösungen in Form des Sekans Hyperbolicus existiert.

Zusammengefasst erwarten wir unter den Annahmen (i)-(iii) an Ω_{j_0} für den asymptotischen Ansatz (5.6) mit einer lokalisierten Lösung $C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ der nichtlinearen Schrödingergleichung (5.7) lokalisierte Lösungen von (5.4).

Basierend auf der obigen Asymptotik werden wir im folgenden Abschnitt numerische Untersuchungen zu lokalisierten Lösungen für die Coupled Mode Gleichungen im Fall $N = 4$ und $d = 2$ durchführen. In diesem Fall sind die Annahmen (i)-(iii) erfüllt, was in Kapitel 4 gezeigt wurde.

5.2 Numerische Suche nach lokalisierten Lösungen der Coupled Mode Gleichungen

In diesem Abschnitt beschreiben wir die numerische Suche nach lokalisierten Lösungen für die in Abschnitt 4.1 hergeleiteten Coupled Mode Gleichungen in zwei Raumdimensionen. Wir betrachten als Ausgangssituation System (4.17) und folgen der Asymptotik aus dem letzten Abschnitt. Nach Abschnitt 5.1 werden Lösungen nahe am spektralen Rand durch Ansatz (5.6) approximiert. Mit dem sogenannten *Townes Soliton* nähern wir uns der Lösung C von (5.7). Dann nutzen wir zur Lösung von (5.4) ein Fixpunktargument und homotopieren in Ω , um eine Lösung in der spektralen Lücke zu finden. Dabei führen wir wieder in jedem Schritt eine Fixpunktiteration durch. Im Folgenden werden die einzelnen Schritte detailliert beschrieben.

Wir berechnen zunächst die Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen (4.17), welche die spektrale Lücke $(-\Omega_0, \Omega_0)$ enthält. Dafür berechnen wir nach der Diskretisierung im Ort die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, so dass Bedingung (4.21) aus Abschnitt 4.2 zur Existenz einer spektralen Lücke erfüllt ist, siehe Abbildung 5.1. Dabei sollen die Punkte $k^{(1)}, \dots, k^{(4)}$ die Bedingung (4.16) erfüllen.

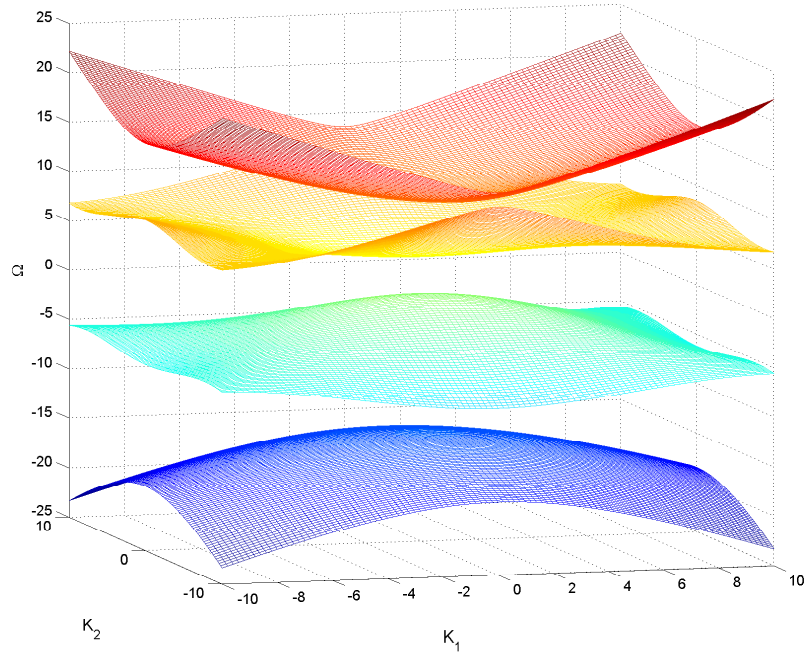


Abbildung 5.1: Dispersionsrelation von (4.17) mit $\alpha_1 = 2.7, \alpha_2 = 0.5, \alpha_3 = 2, v_g^{(1)} = (1, 1)$ und $v_g^{(2)} = (1, -1)$.

Anschließend berechnen wir die Koeffizienten der nichtlinearen Terme. Dann schreiben wir die Lösung $\vec{A}(X, T)$ von (5.1) als $\vec{A}(X, T) = \vec{B}(X)e^{-i\Omega T}$ und erhalten, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, Gleichung (5.4). Da wir exponentiell lokalisierte Lösungen nur in einer spektralen Lücke erwarten, wählen wir $\Omega \in (-\Omega_0, \Omega_0)$ nah am spektralen Rand. Nach 5.1 werden Lösungen nahe am spektralen Rand durch (5.6) approximiert, wobei C die Gleichung

$$\Omega_1 C + \nabla \cdot \frac{1}{2} (D^2 \Omega_{j_0}(0) \nabla C) + \Gamma |C|^2 C = 0 \quad (5.8)$$

löst. Wir lösen jedoch zunächst das Problem

$$\Omega_1 b + \delta \Delta b + \Gamma b^3 = 0 \quad (5.9)$$

mit

$$\delta = \frac{1}{4} (\partial_{k_1}^2 \Omega_{j_0}(0) + \partial_{k_2}^2 \Omega_{j_0}(0)).$$

Für radialsymmetrische Lösungen b können wir Gleichung (5.9) in Polarkoordinaten umschreiben. Wir suchen das Profil einer reellen stationären Lösung der nichtlinearen Schrödingergleichung in zwei Raumdimensionen. Das Vorgehen ist in dem folgenden Abschnitt beschrieben.

Schießverfahren

Wir nutzen das Schießverfahren, um eine Lösung von (5.9) zu finden. Das Schießverfahren ist eine numerische Methode, um Randwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen zu lösen. Bei diesem Verfahren wird mit einer bestimmten Anfangssteigung und von einem bestimmten Anfangswert aus „geschossen“. Die Anfangssteigung wird so lange variiert, bis das Ziel, also der geforderte Randwert, getroffen wird. Dafür schreiben wir Gleichung (5.9) in Polarkoordinaten um, wobei die Gleichung nur noch vom Radius abhängt, da wir radialsymmetrische Lösungen suchen.

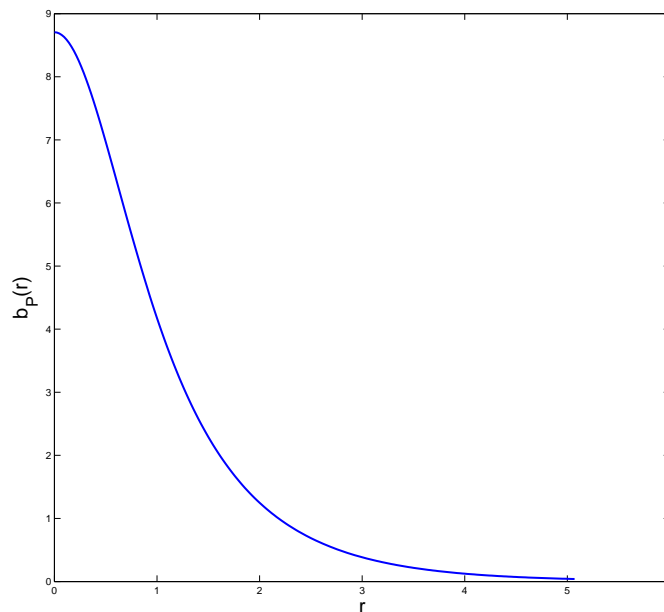


Abbildung 5.2: Profil der Lösung $b_P(r)$ von Gleichung (5.9) in Polarkoordinaten nach dem Schießverfahren.

Als ODE-Löser im Schießverfahren verwenden wir die Matlabroutine „ODE45“, welche gewöhnliche Differentialgleichungen auf Basis des Runge-Kutta-Verfahrens löst.

Aus dem Profil, welches wir durch das Schießverfahren erhalten, konstruieren wir den gesuchten radialsymmetrischen Soliton als Lösung von (5.9), siehe Abbildung 5.2. Wir homotopieren von $\delta\Delta b$ zu $\nabla \cdot (D^2\Omega_{j_0}(0)\nabla C)$, um eine Lösung von (5.8) zu finden. Dafür lösen wir in jedem Homotopieschritt eine Gleichung, welche sich Gleichung (5.8) immer mehr annähert.

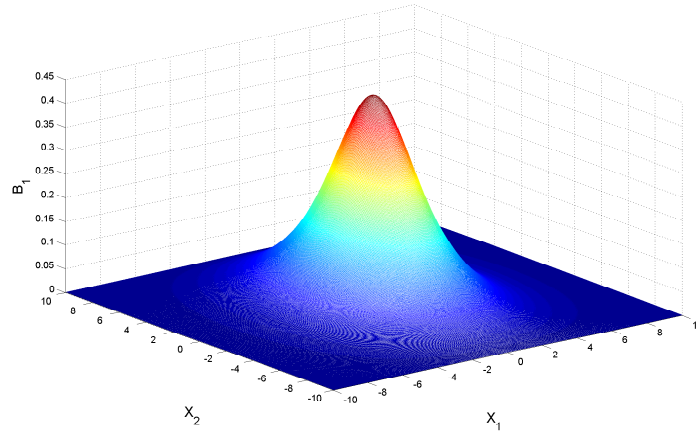


Abbildung 5.3: Lösung von (5.8) nach der Homotopie.

Fixpunktiteration mit Petviashvili

Mit Hilfe einer Fixpunktiteration lösen wir nun Gleichung (5.4) mit $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1$. Wir suchen dafür ein geeignetes Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichung (5.4). Ein solches Verfahren zur Lösung einer Fixpunktgleichung ist das Newton Verfahren. In unserem Fall allerdings konvergiert das Newton Verfahren nicht. Das liegt an der Berechnung der Differenzenquotienten, da sich die geraden und ungeraden Knotenpunkte entkoppeln, was Oszillationen zur Folge hat.

Deshalb wenden wir den Petviashvili Algorithmus zur Berechnung einer lokalisierten Lösung für die Coupled Mode Gleichungen an [Pet76, AM05]. Als Ausgangssituation haben wir ein System von Gleichungen vom nichtlinearen Dirac Typ, welches in den Fourierraum transformiert wird. Für die Berechnung der Lösung wird dann eine nichtlineare, nichtlokale Integralgleichung, gekoppelt mit einer algebraischen Gleichung, bestimmt. Die Kopplung mit der algebraischen Gleichung hindert den Algorithmus am Divergieren. So kann die nichtlineare Mode durch eine konvergente Fixpunktiteration bestimmt werden.

Für die Berechnung von lokalisierten Lösungen soll das System (4.17) aus nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen gelöst werden. Dafür verwenden wir das System in \vec{B} (5.4) und transformieren es in den Fourierraum. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 (\Omega - v_g^{(1)} \cdot K) \hat{B}_1 + \alpha_1 \hat{B}_2 + \alpha_3 \hat{B}_3 + \alpha_2 \hat{B}_4 + \mathcal{F}(N_1) &= 0 \\
 (\Omega + v_g^{(1)} \cdot K) \hat{B}_2 + \bar{\alpha}_1 \hat{B}_1 + \bar{\alpha}_2 \hat{B}_3 + \bar{\alpha}_3 \hat{B}_4 + \mathcal{F}(N_2) &= 0 \\
 (\Omega - v_g^{(2)} \cdot K) \hat{B}_3 + \bar{\alpha}_3 \hat{B}_1 + \alpha_2 \hat{B}_2 + \alpha_1 \hat{B}_4 + \mathcal{F}(N_3) &= 0 \\
 (\Omega + v_g^{(2)} \cdot K) \hat{B}_4 + \bar{\alpha}_2 \hat{B}_1 + \alpha_3 \hat{B}_2 + \bar{\alpha}_1 \hat{B}_3 + \mathcal{F}(N_4) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Dann wird ein Konvergenzfaktor bestimmt, der auf dem Grad der Nichtlinearität beruht, in unserem Fall ist die Homogenität drei.

Die Vorteile des Algorithmus sind, dass er relativ leicht zu implementieren ist. Außerdem

kann er auf eine große Klasse von Problemen angewendet werden, sowie auch auf hochgradig nichtlineare Probleme. Wir schreiben System (5.10) in kompakter Schreibweise als

$$M(K)\hat{\vec{B}}(K) + \mathcal{F}(\vec{N})(K) = 0 \quad (5.11)$$

mit der Matrix

$$M(K) = \begin{pmatrix} \Omega - v_g^{(1)} \cdot K & \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \bar{\alpha}_1 & \Omega + v_g^{(1)} \cdot K & \bar{\alpha}_2 & \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_3 & \alpha_2 & \Omega - v_g^{(2)} \cdot K & \alpha_1 \\ \bar{\alpha}_2 & \alpha_3 & \bar{\alpha}_1 & \Omega + v_g^{(2)} \cdot K \end{pmatrix}$$

und der Fouriertransformation des Nichtlinearitätenvektors $\mathcal{F}(\vec{N})$. Ein standardmäßiger iterativer Algorithmus zur Lösung von Gleichung (5.11) lautet

$$\hat{B}_j^{(n+1)}(K) = - \left[M^{-1}(K) \mathcal{F}(\vec{N})^{(n)}(K) \right]_j, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Dieser Algorithmus divergiert im Allgemeinen, selbst wenn ein Fixpunkt $\vec{B}(K)$ in Problem (5.11) existiert.

In einer modifizierten Version des Algorithmus nutzen wir deshalb einen Stabilisierungsfaktor $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$. Wir zerlegen die Komponenten des Vektors \vec{B} multiplikativ in

$$\hat{B}_1 = \lambda_1 \hat{U}_1, \quad \hat{B}_2 = \lambda_2 \hat{U}_2, \quad \hat{B}_3 = \lambda_3 \hat{U}_3, \quad \hat{B}_4 = \lambda_4 \hat{U}_4$$

mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$ für $j = 1, \dots, 4$. Wir berechnen im ersten Schritt die λ_j für $j = 1, \dots, 4$ mit dem Newton Verfahren. Hier ist das im Gegensatz zu der Fixpunktgleichung für B möglich. Dafür definieren wir

$$\begin{aligned} G_1 &= \|\hat{U}_1\|_{L^2} \lambda_1 + \left\langle \left[M^{-1}(K) \mathcal{F}(\vec{N}) \right]_1, \hat{U}_1 \right\rangle = 0, \\ G_2 &= \|\hat{U}_2\|_{L^2} \lambda_2 + \left\langle \left[M^{-1}(K) \mathcal{F}(\vec{N}) \right]_2, \hat{U}_2 \right\rangle = 0, \\ G_3 &= \|\hat{U}_3\|_{L^2} \lambda_3 + \left\langle \left[M^{-1}(K) \mathcal{F}(\vec{N}) \right]_3, \hat{U}_3 \right\rangle = 0, \\ G_4 &= \|\hat{U}_4\|_{L^2} \lambda_4 + \left\langle \left[M^{-1}(K) \mathcal{F}(\vec{N}) \right]_4, \hat{U}_4 \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

Mit den berechneten λ_j , $j = 1, \dots, 4$ führen wir dann die Petviashvili Iteration

$$\hat{U}_j^{(n+1)} = - \left[\frac{M^{-1}(K) \mathcal{F}(\vec{N})^{(n)}}{\lambda_j^{(n)}} \right]_j, \quad j = 1, \dots, 4$$

durch. Dieser Algorithmus konvergiert, wie in [PS04] nachzulesen ist, falls $|\lambda_j^{(n)} - \delta| > 0$ für eine Toleranz $\delta > 0$.

Für die Berechnungen der Petviashvili-Iteration nutzen wir als Ausgangsgebiet $x \in [-30, 30]$ und eine Diskretisierung, welche durch eine Anzahl von 300×300 Gitterpunkten definiert ist. Das Gebiet wird im Laufe der Berechnungen iterativ verkleinert, da sich die Lösung

mittig konzentriert, siehe unten.

Den Fixpunkt \hat{U} multiplizieren wir nun mit $\vec{\lambda}$, so dass wir mit der Rücktransformation aus dem Fourierraum eine Lösung von (5.11) erhalten.

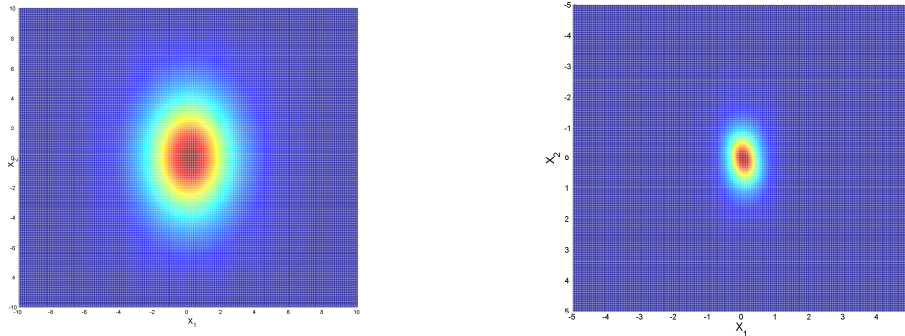


Abbildung 5.4: Entwicklung der Lösung während der Homotopie in die spektrale Lücke für $\Omega = -0,0769$ (links) und $\Omega = -0,0265$ (rechts).

Wir homotopieren mit Ω weiter in die spektrale Lücke $(-\Omega_0, \Omega_0)$, wobei in jedem Homotopieschritt mittels Fixpunktiteration in $\vec{B}(X)$ gelöst wird, siehe Abbildung 5.4. Da sich die Lösung während der Homotopie in x_1 - und x_2 -Richtung immer mehr konzentriert, nutzen wir eine Abschneidefunktion, welche das Gebiet verkleinert und das Gitter neu definiert. Die Abschneidefunktion sorgt dafür, dass der Ausschnitt der x_1 - und x_2 -Achse immer weiter verkleinert wird, da sich die Lösung mit jedem Schritt zusammenzieht und nach oben wächst. Mit $\vec{A}(X, T) = \vec{B}(X)e^{i\Omega T}$ erhalten wir schließlich zeitharmonische lokalisierte Lösungen für die Coupled Mode Gleichungen, siehe Abbildung 5.5.

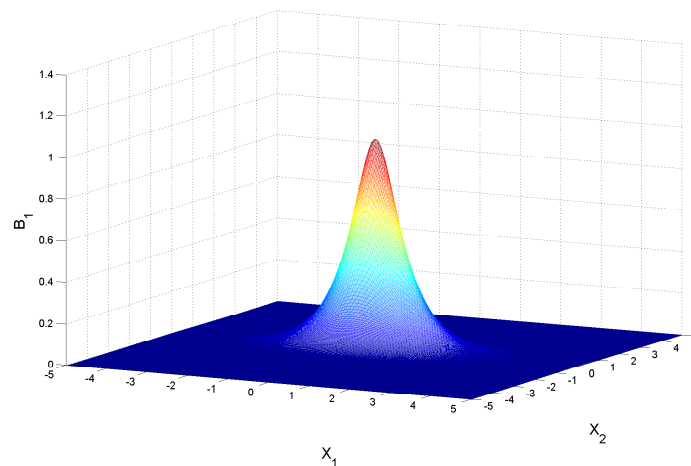


Abbildung 5.5: Zeitharmonische Lösung der Coupled Mode Gleichungen in 2D in der spektralen Lücke ($\Omega = 0$).

5.3 Existenz einer lokalisierten Solitärwelle für die Coupled Mode Gleichungen

Nun möchten wir die formale Asymptotik aus Abschnitt 5.1 rigoros beweisen, das heißt wir zeigen, dass lokalisierte Solitärwellen für die Coupled Mode Gleichungen (4.17) existieren. Für den Beweis orientieren wir uns an dem Vorgehen in [DP18]. Die Autoren approximieren die Lösung der stationären Gross-Pitaevskii Gleichung durch die Lösung der stationären nichtlineare Schrödingergleichung approximiert. In unserem Fall möchten wir System (4.17) für Ω nah am spektralen Rand durch eine nichtlineare Schrödingergleichung approximieren.

Zunächst werden wir eine Lyapunov-Schmidt-Reduktion in Fouriervariablen durchführen, so dass wir zwei Gleichungen erhalten, von denen die erste Gleichung den proportionalen Anteil zum Eigenvektor $\vec{\eta}^{(j_0)}$ der Fouriertransformierten des spektralen Operators enthält und die zweite Gleichung den orthogonalen Anteil. Beide Gleichungen lösen wir dann einzeln mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.

Beim Lösen der Gleichung mit dem orthogonalen Anteil ist der Operator für die Fixpunktgleichung nicht invertierbar, weshalb wir lediglich seine Einschränkung auf L_{sym}^1 betrachten, siehe (5.50), um die Invarianzen zu umgehen und einen invertierbaren Operator zu erhalten.

Unsere Abschätzungen werden wir in Fouriervariablen durchführen und wir werden, wie auch in der Rechtfertigung in Kapitel 6, die L^1 -Norm verwenden.

Formale Asymptotik

Wir verfahren wie mit der Asymptotik in Abschnitt 5.1 und wiederholen zunächst aus Gründen der Lesbarkeit die wichtigsten Formeln. Zur Erinnerung, Ω_0 ist ein Punkt auf dem Rand der spektralen Lücke des Operators $L(\nabla)$ aus (5.2). Wir schreiben

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1, \quad (5.12)$$

wobei das Vorzeichen von Ω_1 so gewählt wird, dass Ω gerade in der spektralen Lücke von $L(\nabla)$ liegt. Unser Ansatz für Gap Solitone in Ω aus (5.12) lautet

$$\vec{B}_{\text{app}}(X) = \varepsilon C(\varepsilon X) \vec{\eta}^{(j_0)}(0), \quad j_0 \in \{1, \dots, 4\}. \quad (5.13)$$

Die fouriertransformierte Gleichung (5.4) lautet

$$\Omega \widehat{B} - L(iK) \widehat{B} + \widehat{N}(\widehat{B}) = 0, \quad (5.14)$$

wobei $\widehat{N} = \mathcal{F}(\vec{N})$ die Fouriertransformierte der Nichtlinearität \vec{N} bezeichnet. Ansatz (5.13) wird transformiert zu

$$\widehat{B}_{\text{app}}(K) = \varepsilon^{-1} \widehat{C} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(0) \quad (5.15)$$

mit $(\vec{\eta}^{(1)}(K), \vec{\eta}^{(2)}(K), \vec{\eta}^{(3)}(K), \vec{\eta}^{(4)}(K))$ Eigenvektoren von $L(K)$, das heißt

$$-L(K) \vec{\eta}^{(j_0)}(K) = \Omega_{j_0}(K) \vec{\eta}^{(j_0)}(K)$$

mit $L(K)$ wie in (5.5) und $\|\vec{\eta}^{(j)}(K)\|_{l^2} = 1 \forall j, K$. Der Punkt Ω_0 auf dem spektralen Rand ist definiert als $\Omega_0 := \Omega_{j_0}(0)$.

Als effektive Gleichung haben wir die nichtlineare Schrödingergleichung

$$\Omega_1 C(\xi) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (D_K^2 \Omega_{j_0}(0) \nabla) C(\xi) + \Gamma |C(\xi)|^2 C(\xi) = 0, \quad (5.16)$$

mit $\Gamma := \vec{\eta}^{(j_0)}(0)^T \vec{N}(\vec{\eta}^{(j_0)}(0))$ wie in (5.7) erhalten.

Da die Lösung \vec{B} von (5.4) vektorwertig ist, definieren wir für die kommenden Abschätzungen die \mathcal{X} -Norm.

Definition 5.3. Für $\vec{f} := (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$ definieren wir $\mathcal{X} := (L^1(\mathbb{R}^2))^4$ mit der Norm

$$\|\vec{f}\|_{\mathcal{X}} := \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} (\|f_l\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}). \quad (5.17)$$

Wir werden für den Beweis von Satz (5.5) im Fourierraum arbeiten. Um die Supremumsnorm gegen die oben definierte \mathcal{X} -Norm abschätzen zu können, benötigen wir die folgende Aussage.

Lemma 5.4. Sei $\widehat{\vec{f}} = (\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \widehat{f}_3, \widehat{f}_4)^T \in (L^1(\mathbb{R}^2))^4$. Dann ist \vec{f} stetig und es existiert ein $c > 0$, so dass

$$\|\vec{f}\|_{C_b^0} \leq c \|\widehat{\vec{f}}\|_{\mathcal{X}}.$$

Beweis. Nach dem Satz von Riemann-Lebesgue ist $\widehat{\vec{f}}$ stetig. Es gilt mit Definition (2.6)

$$\|f_j\|_{C_b^0(\mathbb{R}^2)} = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}_j(k) e^{ik \cdot x} dk \right| \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}_j(k)| dk \leq c \|\widehat{f}_j\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Die Behauptung folgt direkt mit Definition der \mathcal{X} -Norm (5.17). \square

Basierend auf der obigen formalen Asymptotik formulieren wir das folgende Approximationstheorem.

Satz 5.5. Sei C Lösung von (5.16) mit $C(X) = \overline{C(-X)}$, $\widehat{C} \in L_{s_C}^1(\mathbb{R}^2)$ und $s_C \geq 1$. Dann existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $c > 0$, so dass Gleichung (5.4) mit $\Omega = \Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1$ für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ eine Lösung \vec{B} mit $\widehat{\vec{B}} \in \mathcal{X}$ hat und es gilt

$$\|\vec{B} - \vec{B}_{app}\|_{C_b^0} \leq c\varepsilon^{3/2}$$

und $\vec{B}(X) \rightarrow 0$ für $|X| \rightarrow \infty$. Dabei ist \vec{B}_{app} definiert durch (5.13).

Beweis. Als erstes formen wir Gleichung (5.14) in ein System um, deren Gleichungen wir Schritt für Schritt lösen. Wir zerlegen $\widehat{\vec{B}}$ in den Anteil, der dem spektralen Band Ω_{j_0} entspricht, und in den Rest.

Dafür definieren wir die Projektionen

$$P_K : \mathbb{C}^4 \rightarrow \text{span}\{\vec{\eta}^{(j_0)}(K)\} \quad (5.18)$$

$$Q_K = I - P_K : \mathbb{C}^4 \rightarrow \text{span}\{\vec{\eta}^{(j_0)}(K)\}^\perp, \quad (5.19)$$

so dass

$$\left(P_K \widehat{B} \right) (K) := \vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{B}(K) \vec{\eta}^{(j_0)}(K).$$

Wir nennen den zu $\vec{\eta}^{(j_0)}$ proportionalen Anteil der Lösung \widehat{B}_P und den zu $\vec{\eta}^{(j_0)}$ orthogonalen Anteil \widehat{B}_Q . Es ist

$$\widehat{B}(K) = \widehat{B}_P(K) + \widehat{B}_Q(K) \quad (5.20)$$

mit

$$\begin{aligned} \widehat{B}_P(K) &= P_K \widehat{B}(K) =: \Psi(K) \vec{\eta}^{(j_0)}(K), \\ \widehat{B}_Q(K) &= Q_K \widehat{B}(K) = (1 - P_K) \widehat{B}(K). \end{aligned}$$

Da die \widehat{B}_j für $j = 1, \dots, 4$ konzentriert um $K = 0$ sind, teilen wir $\Psi(K)$ auf in einen Teil mit Träger in $B_{\varepsilon^r}(0)$ und in einen Teil mit Träger außerhalb von $B_{\varepsilon^r}(0)$.

$$\Psi(K) =: \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right). \quad (5.21)$$

Für ε klein genug sind die Komponenten $\widehat{\mathcal{D}}$ und $\widehat{\mathcal{R}}$ definiert durch ihren Träger

$$\text{supp} \left(\widehat{\mathcal{D}}(\cdot) \right) \subset B_{\varepsilon^{r-1}}(0) \quad \text{und} \quad \text{supp} \left(\widehat{\mathcal{R}}(\cdot) \right) \subset \mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^{r-1}}(0) \quad (5.22)$$

mit $r \in (0, 1)$, welches später präziser bestimmt wird. Mit der obigen Zerlegung ist also

$$\widehat{B}(K) = \left(\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K) + \widehat{B}_Q(K). \quad (5.23)$$

Mit (5.12) und (5.23), eingesetzt in (5.14) bekommen wir

$$\begin{aligned} & (\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1) \left(\left(\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K) + \widehat{B}_Q(K) \right) \\ & - L(K) \left(\left(\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K) + \widehat{B}_Q(K) \right) + \widehat{N}(\widehat{B})(K) = 0. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Wir nutzen an dieser Stelle die Eigenwertgleichung $-L(K) \vec{\eta}^{(j_0)}(K) = \Omega_{(j_0)}(K) \vec{\eta}^{(j_0)}(K)$ und zerlegen (5.24) mit Hilfe der Projektionen (5.18) und (5.19) in ihren Anteil proportional und orthogonal zu $\vec{\eta}^{(j_0)}$.

Dadurch erhalten wir die beiden Gleichungen

$$(\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1 - \Omega_{j_0}(K)) \left(\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \right) + \vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{N}(\widehat{B})(K) = 0 \quad (5.25)$$

$$Q_K (\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1 - L(K)) Q_K \widehat{B}_Q + \widehat{N}(\widehat{B})(K) - \left(\vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{N}(\widehat{B})(K) \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K) = 0, \quad (5.26)$$

wobei die Terme in (5.25) proportional zu $\vec{\eta}^{(j_0)}(K)$ sind und (5.26) die orthogonalen Terme zu $\vec{\eta}^{(j_0)}(K)$ enthält. Wir schreiben (5.26) als

$$Q_K (\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1 - L(K)) Q_K \widehat{B}_Q + Q_K \widehat{N}(\widehat{B}_P)(K) + Q_K \left(\widehat{N}(\widehat{B})(K) - \widehat{N}(\widehat{B}_P)(K) \right) = 0. \quad (5.27)$$

Weil der Anteil $Q_K \widehat{N}(\widehat{B}_P)(K)$ in (5.27) zu große Terme produziert, führen wir eine sogenannte *near identity transformation* durch [KSM92]. Das heißt, wir teilen $\widehat{B}_Q(K)$ in die Summe

$$\widehat{B}_Q(K) := \widehat{B}_{Q,1}(K) + \widehat{B}_{Q,R}(K) \quad (5.28)$$

auf, wobei $\widehat{B}_{Q,1}$ und $\widehat{B}_{Q,R}$ die folgenden Gleichungen lösen:

$$Q_K (\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1 - L(K)) Q_K \widehat{B}_{Q,1}(K) + Q_K \widehat{N}(\widehat{B}_P)(K) = 0 \quad (5.29)$$

$$Q_K (\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1 - L(K)) Q_K \widehat{B}_{Q,R}(K) + Q_K \left(\widehat{N}(\widehat{B})(K) - \widehat{N}(\widehat{B}_P)(K) \right) = 0. \quad (5.30)$$

Als Ausgangslage haben wir nun also ein System aus den drei Gleichungen (5.25), (5.29) und (5.30).

Konstruktion einer Lösung \widehat{B}

Wir suchen eine Lösung \widehat{B} von (5.14), so dass $\widehat{\mathcal{D}}$ nahe an \widehat{C} ist, siehe dazu (5.15) und (5.16). Weiter fordern wir von der Lösung, dass die Komponenten $\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{B}_{Q,1}(K)$ und $\widehat{B}_{Q,R}(K)$ klein sind. Offensichtlich ist das System aus den Gleichungen (5.25), (5.29) und (5.30) gekoppelt in $\widehat{\mathcal{D}}, \widehat{\mathcal{R}}, \widehat{B}_{Q,1}(K)$ und $\widehat{B}_{Q,R}(K)$. Wir können allerdings jede Gleichung einzeln behandeln, indem wir vorher entsprechende Annahmen an Form und Größe der jeweils übrigen Komponenten treffen. Im Detail besteht die Konstruktion einer Lösung \widehat{B} aus den folgenden Schritten. Wir lösen für ein gegebenes kleines \widehat{B}_P Gleichung (5.29), um mit der Invertierbarkeit von $(\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1 - L(K))$ ein $\widehat{B}_{Q,1}$ zu erhalten, welches ebenfalls klein ist. Dann wenden wir für ein gegebenes kleines \widehat{B}_P den Banachschen Fixpunktsatz auf Gleichung (5.30) in der Nähe von Null an, um eine kleine Lösung $\widehat{B}_{Q,R}$ für ε klein genug zu erhalten. Für ein gegebenes $\widehat{\mathcal{D}}$ mit ausreichend schnellem Abfall wenden wir dann den Banachschen Fixpunktsatz auf (5.25) auf dem Träger von $\widehat{\mathcal{R}}$ an, um ein kleines $\widehat{\mathcal{R}}$ zu finden.

Schließlich überprüfen wir die Existenz einer solchen Lösung $\widehat{\mathcal{D}}$ von (5.25) (mit $\widehat{\mathcal{R}}$ gegeben durch den vorherigen Schritt) auf dem Träger von $\widehat{\mathcal{D}}$, was nah an einer Lösung \widehat{C} von (5.16) ist. Desweiteren werden wir Abschätzungen für die Komponenten \widehat{B}_P , $\widehat{\mathcal{D}}$ und $\widehat{\mathcal{R}}$ benötigen. Wir formulieren das folgende Lemma:

Lemma 5.6. *Vorbereitende Abschätzungen*

Sei \widehat{B}_P wie in (5.20), sowie $\widehat{\mathcal{D}}$ und $\widehat{\mathcal{R}}$ wie in (5.21) definiert. Weiter nehmen wir an, dass für alle $\varepsilon > 0$ klein genug gilt, dass

$$\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1_{s_{\mathcal{D}}}(\mathbb{R}^2)} + \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_{s_{\mathcal{R}}}(\mathbb{R}^2)} \leq c \quad (5.31)$$

ist, wobei $s_{\mathcal{D}}, s_{\mathcal{R}} \geq 0$ später bestimmt werden. Dann gilt

$$\left\| \widehat{B}_P \right\|_{\mathcal{X}} \leq c\varepsilon \left(\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(B_{\varepsilon^{r-1}}(0))} + \varepsilon^{1+(1-r)s_{\mathcal{R}}} \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_{s_{\mathcal{R}}}(\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^{r-1}}(0))} \right) \quad (5.32)$$

und für die Nichtlinearität ist

$$\left\| \widehat{N} \left(\widehat{B}_P \right) \right\|_{\mathcal{X}} \leq c\varepsilon^3 \quad (5.33)$$

mit $c = c \left(\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right)$.

Beweis. Als Erstes schätzen wir \widehat{B}_P in der \mathcal{X} -Norm ab. Es ist

$$\begin{aligned} \|\widehat{B}_P(K)\|_{\mathcal{X}} &= \left\| \left(\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \vec{\eta}^{(j_0)} \right\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \|\vec{\eta}_l^{(j_0)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \left\| \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq c \left(\varepsilon \|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(B_{\varepsilon^{r-1}}(0))} + \varepsilon^2 \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^{r-1}}(0))} \right), \end{aligned}$$

mit (5.22). Es ist $\vec{\eta}_l^{(j_0)} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ wegen $\|\eta^{(j_0)}(K)\|_{L^2} = 1 \forall K$ und Nun möchten wir aber die Ausläufer, also die „tails“ von $\widehat{\mathcal{R}}$ sehr klein bekommen. Deshalb schätzen wir den zweiten Teil der rechten Seite weiter ab. Es ist

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^{r-1}}(0))} &= \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^{r-1}}(0)} |\widehat{\mathcal{R}}(l)| dl \\ &\leq \sup_{|l| > \varepsilon^{(r-1)}} (1 + |l|)^{-s_{\mathcal{R}}} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^{r-1}}(0)} (1 + |l|)^{s_{\mathcal{R}}} |\widehat{\mathcal{R}}(l)| dl \\ &\leq \varepsilon^{(1-r)s_{\mathcal{R}}} \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_{s_{\mathcal{R}}}}, \end{aligned}$$

wobei $L^1_{s_{\mathcal{R}}}$ wie in (2.13) definiert ist. Damit haben wir, dass

$$\left\| \widehat{B}_P \right\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon \|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \varepsilon^{2+(1-r)s_{\mathcal{R}}} \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_{s_{\mathcal{R}}}(\mathbb{R}^2)}$$

für alle $s_{\mathcal{R}} > 0$.

Die nächste Abschätzung betrifft die Nichtlinearität \widehat{N} . Diese erhalten wir, indem wir die nichtlinearen Terme in (5.3) fouriertransformieren. Allgemein kann man sie als Summe aus Termen der Form

$$\gamma_k(B_{l_1} * \overline{B_{l_2}} * B_{l_3}), \quad k = 1, 2 \quad (5.34)$$

mit $l_1, l_2, l_3 \in \{1, \dots, 4\}$ schreiben. Mit der Zerlegung (5.20) erhalten wir in der fouriertransformierten Nichtlinearität Summanden der Form (5.34) mit $B_{l_j} \in \left\{ \widehat{B}_P, \widehat{B}_Q \right\}$ für $j = 1, 2, 3$.

Wir betrachten als Beispiel die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \gamma_1 \left(\Psi \eta_1^{(j_0)} * \overline{\Psi \eta_1^{(j_0)}} * \Psi \eta_1^{(j_0)} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq c \|\Psi \eta_1^{(j_0)}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^3 \\ &\leq c \|\Psi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^3 \|\eta_1^{(j_0)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^3. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Young-Ungleichung für Faltungen mit $r, p, q = 1$ genutzt. Ebenso kann man mit den restlichen Summanden der Nichtlinearität vorgehen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{N} \left(\widehat{B}_P, \widehat{B}_P, \widehat{B}_P \right) \right\|_{\mathcal{X}} &\leq \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| \vec{\eta}_l^{(j_0)} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^3 \left\| \left(\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^3 \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) dK \right)^3 \\ &\leq c \left(\int_{B_{\varepsilon r}(0)} \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) dK + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon r}(0)} \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) dK \right)^3 \\ &\leq c \left(\int_{B_{\varepsilon r-1}(0)} \varepsilon \widehat{\mathcal{D}}(l) dl + \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon r-1}(0)} \widehat{\mathcal{R}}(l) dl \right)^3 \\ &\leq c \varepsilon^3 \left(\left\| \widehat{\mathcal{D}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \varepsilon^{1+(1-r)s_{\mathcal{R}}} \left\| \widehat{\mathcal{R}} \right\|_{L^1_{s_{\mathcal{R}}}(\mathbb{R}^2)} \right)^3 \end{aligned}$$

mit (5.32) und (5.31). □

Schritt 1 (Die Komponente $\widehat{B}_{Q,1}$)

Wir lösen nun Gleichung (5.29) für $\vec{B}_{Q,1}$ unter der Annahme, dass

$$\left\| \widehat{\mathcal{D}} \right\|_{L^1_{s_{\mathcal{D}}}(\mathbb{R}^2)} + \left\| \widehat{\mathcal{R}} \right\|_{L^1_{s_{\mathcal{R}}}(\mathbb{R}^2)} \leq c.$$

Der Operator

$$M_K := Q_K (\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1 - L(K)) Q_K$$

mit $M_K : Q_K \mathbb{C}^4 \rightarrow Q_K \mathbb{C}^4$ ist invertierbar mit einer beschränkten Inversen, da der Kern orthogonal zu $Q_K \mathbb{C}^4$ ist. Durch das Umstellen von (5.29) folgt, dass

$$\widehat{B}_{Q,1}(K) = M_K^{-1} \widehat{N} \left(\widehat{B}_P(K) \right).$$

Sei \widehat{B}_P klein gegeben, dann ist mit der Matrixnorm $||| \cdot |||$

$$\begin{aligned} \left\| \widehat{B}_{Q,1} \right\|_{\mathcal{X}} &\leq \sup_{K \in \mathbb{R}^2} ||| M_K^{-1} ||| \left\| \widehat{N} \left(\widehat{B}_P \right) \right\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq c \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| \widehat{N}_l \left(\widehat{B}_P \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq c \varepsilon^3, \end{aligned} \quad (5.35)$$

wobei c wegen (5.31) und (5.33) nur polynomiell von $\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1_{s_D}(\mathbb{R}^2)}$ und $\|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_{s_R}(\mathbb{R}^2)}$ abhängt.

Schritt 2 (Die Komponente $\widehat{B}_{Q,R}$)

Wir lösen nun (5.30) für $\widehat{B}_{Q,R}$ mit dem Banachschen Fixpunktsatz, wobei eine Abschätzung von $\widehat{B}_{Q,1}$ durch den letzten Schritt gegeben ist. Gleichung (5.30) ist äquivalent zu

$$\widehat{B}_{Q,R} = M_K^{-1} Q_K \left(\widehat{N} \left(\widehat{B}_P \right) - \widehat{N} \left(\widehat{B}_P + \widehat{B}_{Q,1} + \widehat{B}_{Q,R} \right) \right) =: \vec{G} \left(\widehat{B}_{Q,R} \right). \quad (5.36)$$

Für die Selbstabbildungs- und Kontraktionseigenschaft definieren wir

$$B_{\theta \varepsilon^\eta} := \left\{ \vec{f} \in L^1(\mathbb{R}^2) \mid \|\vec{f}\|_{\mathcal{X}} \leq \theta \varepsilon^\eta \right\}$$

für ein $\theta > 0$ und $\eta > 0$, welche noch zu bestimmen sind. Es ist

$$\begin{aligned} \left\| G \left(\widehat{B}_{Q,R} \right) \right\|_{\mathcal{X}} &\leq \sup_{K \in \mathbb{R}^2} ||| M_K^{-1} ||| \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| \widehat{N}_l \left(\widehat{B}_P \right) - \widehat{N}_l \left(\widehat{B}_P + \widehat{B}_{Q,1} + \widehat{B}_{Q,R} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq c \left(\left\| \widehat{B}_P \right\|_{\mathcal{X}}^2 \left(\left\| \widehat{B}_{Q,1} \right\|_{\mathcal{X}} + \left\| \widehat{B}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}} \right) + \left\| \widehat{B}_{Q,1} \right\|_{\mathcal{X}}^2 \left(\left\| \widehat{B}_P \right\|_{\mathcal{X}} + \left\| \widehat{B}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}} \right) \right. \\ &\quad + \left\| \widehat{B}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}}^2 \left(\left\| \widehat{B}_{Q,1} \right\|_{\mathcal{X}} + \left\| \widehat{B}_P \right\|_{\mathcal{X}} \right) + \left\| \widehat{B}_P \right\|_{\mathcal{X}} \left\| \widehat{B}_{Q,1} \right\|_{\mathcal{X}} \left\| \widehat{B}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}} \\ &\quad \left. + \left\| \widehat{B}_{Q,1} \right\|_{\mathcal{X}}^3 + \left\| \widehat{B}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}}^3 \right). \end{aligned}$$

Wir wählen $\widehat{B}_{Q,R} \in B_{\theta \varepsilon^\eta}$, so dass $\left\| \widehat{B}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}} \leq \theta \varepsilon^\eta$. Es folgt dann mit (5.32), dass

$$\left\| \vec{G} \left(\widehat{B}_{Q,R} \right) \right\|_{\mathcal{X}} \leq c \left(\varepsilon^5 + \varepsilon^{2+\eta} + \varepsilon^{3\eta} \right).$$

Also ist für $\eta \geq 3$

$$\left\| \vec{G} \left(\widehat{B}_{Q,R} \right) \right\|_{\mathcal{X}} \leq c \varepsilon^5 \quad (5.37)$$

und $\vec{G} \left(\widehat{B}_{Q,R} \right) \in B_{\theta \varepsilon^\eta}$ für $\eta = 5$ und $\theta = c$.

Für die Kontraktionseigenschaft betrachten wir $\widehat{B}_{Q,R}$ und $\widehat{A}_{Q,R} \in B_{\theta \varepsilon^\eta}$. Es ist

$$\begin{aligned}
 & \left\| \vec{G} \left(\widehat{B}_{Q,R} \right) - \vec{G} \left(\widehat{A}_{Q,R} \right) \right\|_{\mathcal{X}} \\
 & \leq \sup_{K \in \mathbb{R}^2} \|M_K^{-1}\| \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| \left(\widehat{N}_l \left(\widehat{B}_P + \widehat{B}_{Q,1} + \widehat{B}_{Q,R} \right) - \widehat{N}_l \left(\widehat{B}_P + \widehat{B}_{Q,1} + \widehat{A}_{Q,R} \right) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
 & \leq c \left(\left\| \widehat{B}_P \right\|_{\mathcal{X}}^2 + \left\| \widehat{B}_{Q,1} \right\|_{\mathcal{X}}^2 + \left\| \widehat{B}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}}^2 + \left\| \widehat{A}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}}^2 \right) \left\| \widehat{B}_{Q,R} - \widehat{A}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}} \\
 & \leq c\varepsilon^2 \left\| \widehat{B}_{Q,R} - \widehat{A}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}}.
 \end{aligned}$$

Die Kontraktionseigenschaft ist für $\varepsilon > 0$, klein genug erfüllt, das heißt $c\varepsilon^2 < 1$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert eine eindeutige Lösung von (5.36) für $\widehat{B}_{Q,R}$, welche die Abschätzung

$$\left\| \widehat{B}_{Q,R} \right\|_{\mathcal{X}} \leq c\varepsilon^5 \tag{5.38}$$

erfüllt, wobei c wegen (5.31) und (5.33) polynomiell von $\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ und $\|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_{s_R}(\mathbb{R}^2)}$ abhängt.

Schritt 3 (Die Komponente $\widehat{\mathcal{R}}$)

Wir möchten nun eine Lösung von (5.25) auf dem Träger von $\widehat{\mathcal{R}}$ finden. Dafür schreiben wir (5.25) um zu

$$\widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) = -\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + (\Omega_{j_0}(K) - \Omega_0 - \varepsilon^2 \Omega_1)^{-1} \left(\vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{N} \left(\widehat{B} \right) (K) \right),$$

wobei $\widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) = 0$ mit $K \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon r}(0)$ wegen $\text{supp} \left(\widehat{\mathcal{D}}(\cdot) \right) \subset B_{\varepsilon r-1}(0)$. Also ist

$$\widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) = \varepsilon (\Omega_{j_0}(K) - \Omega_0 - \varepsilon^2 \Omega_1)^{-1} (1 - \chi_{B_{\varepsilon r}}(K)) \left(\vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{N} \left(\widehat{B} \right) (K) \right).$$

Auch hier möchten wir wieder den Banachschen Fixpunktsatz nutzen. Wir definieren $\nu(K) := (\Omega_{j_0}(K) - \Omega_0 - \varepsilon^2 \Omega_1)^{-1}$, sowie

$$\widehat{B}_{\mathcal{R}}(K) := \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K) \tag{5.39}$$

$$\widehat{B}_{\mathcal{D}}(K) := \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K). \tag{5.40}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathcal{R}}\left(\frac{K}{\varepsilon}\right) &= \nu(K) (1 - \chi_{B_{\varepsilon^r}}(K)) \left(\vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{N}(\widehat{B})(K) \right) \\
 &= \nu(K) (1 - \chi_{B_{\varepsilon^r}}(K)) \left(h^{-1}(K) \left(h(K) \vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{N}(\widehat{B}_{\mathcal{D}})(K) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \left(\widehat{N}(\widehat{B})(K) - \widehat{N}(\widehat{B}_{\mathcal{D}})(K) \right) \right) =: H(\widehat{\mathcal{R}})(K)
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

mit $h(K) := \left(1 + \frac{|K|}{\varepsilon}\right)^{s_{\mathcal{D}}}$ für ein $s_{\mathcal{D}} > 1/2$, welches noch zu bestimmen ist. Da Ω_{j_0} lokal um $K = 0$ quadratisch ist, gilt

$$\sup_{K \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^r}} \nu(K) = \sup_{K \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^r}} (\Omega_{j_0}(K) - \Omega_0 - \varepsilon^2 \Omega_1)^{-1} = c\varepsilon^{-2r}$$

und

$$\sup_{K \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^r}} h(K)^{-1} = \sup_{K/\varepsilon \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^{r-1}}} \left(1 + \frac{|K|}{\varepsilon}\right)^{-s_{\mathcal{D}}} = c\varepsilon^{(1-r)s_{\mathcal{D}}}.$$

Nun definieren wir die Summanden von (5.41) als

$$\begin{aligned}
 T_1 &:= \nu(K) (1 - \chi_{B_{\varepsilon^r}}(K)) h^{-1}(K) \left(h(K) \vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{N}(\widehat{B}_{\mathcal{D}})(K) \right), \\
 T_2 &:= \nu(K) (1 - \chi_{B_{\varepsilon^r}}(K)) \vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \left(\widehat{N}(\widehat{B})(K) - \widehat{N}(\widehat{B}_{\mathcal{D}})(K) \right).
 \end{aligned}$$

Wir schätzen T_1 wie folgt ab.

$$\begin{aligned}
 \|T_1\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \left\| \nu (1 - \chi_{B_{\varepsilon^r}}) h^{-1} \left(h \vec{\eta}^{(j_0)*} \widehat{N}(\widehat{B}_{\mathcal{D}}) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|(1 - \chi_{B_{\varepsilon^r}}) h^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \left\| \left(h \vec{\eta}^{(j_0)*} \widehat{N}(\widehat{B}_{\mathcal{D}}) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq c\varepsilon^{-2r} \varepsilon^{(1-r)s_{\mathcal{D}}} \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| \vec{\eta}_l^{(j_0)*} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \left\| h \widehat{N}_l(\widehat{B}_{\mathcal{D}}) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq c\varepsilon^{-2r+(1-r)s_{\mathcal{D}}} \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| h \widehat{N}_l(\widehat{B}_{\mathcal{D}}) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq c\varepsilon^{-2r+(1-r)s_{\mathcal{D}}} \varepsilon^{-3} \left\| h \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^3 \\
 &\leq c\varepsilon^{-2r+(1-r)s_{\mathcal{D}}+3} \|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^{\frac{1}{s_{\mathcal{D}}}}(\mathbb{R}^2)}^3,
 \end{aligned}$$

wobei der vorletzte Schritt durch die Youngsche Ungleichung für Faltungen gegeben ist, siehe Lemma A.7. Nun schätzen wir den zweiten Summanden der rechten Seite ab. Es ist

$$\|T_2\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \left\| \nu (1 - \chi_{B_{\varepsilon^r}}) \vec{\eta}^{(j_0)*} \left(\widehat{N}(\widehat{B}) - \widehat{N}(\widehat{B}_{\mathcal{D}}) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq c \|\nu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon^r})} \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left(\left\| \vec{\eta}_l^{(j_0)*} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \left\| \widehat{N}_l(\widehat{B}) - \widehat{N}_l(\widehat{B}_{\mathcal{D}}) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right) \\
 &\leq c \varepsilon^{-2r} \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| \widehat{N}_l \left(\widehat{B}_Q + \left(\widehat{B}_{\mathcal{D}} + \widehat{B}_{\mathcal{R}} \right) \right) - \widehat{N}_l(\widehat{B}_{\mathcal{D}}) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq c \varepsilon^{-2r} \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left(\left\| (\widehat{B}_{\mathcal{R}})_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^3 + \left\| (\widehat{B}_{\mathcal{R}})_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \left(\left\| (\widehat{B}_{\mathcal{D}})_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \left\| (\widehat{B}_Q)_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left\| (\widehat{B}_{\mathcal{R}})_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \left(\left\| (\widehat{B}_{\mathcal{D}})_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 + \left\| (\widehat{B}_Q)_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \right) + \left\| (\widehat{B}_{\mathcal{D}})_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \left\| (\widehat{B}_Q)_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \right. \\
 &\quad \left. + \left\| (\widehat{B}_{\mathcal{D}})_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \left\| (\widehat{B}_Q)_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 + \left\| (\widehat{B}_Q)_l \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^3 \right)
 \end{aligned}$$

wiederum mit Lemma A.7. Außerdem haben wir wegen $B_Q = B_{Q,1} + B_{Q,R}$ und mit (5.35) und (5.38), dass

$$\begin{aligned}
 \|B_Q\|_{\mathcal{X}} &\leq \|B_{Q,1}\|_{\mathcal{X}} + \|B_{Q,R}\|_{\mathcal{X}} \\
 &\leq c\varepsilon^3.
 \end{aligned}$$

Wir benötigen noch eine Abschätzung von $\widehat{B}_{\mathcal{D}}$. Es ist

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{B}_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{X}} &= \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \varepsilon^{-1} \|\widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \vec{\eta}_l^{(j_0)}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq c\varepsilon \|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(B_{\varepsilon^{r-1}}(0))} \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \|\vec{\eta}_l^{(j_0)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \\
 &\leq c\varepsilon \|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(B_{\varepsilon^{r-1}}(0))}.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Und analog gilt

$$\|\widehat{B}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}} \leq c\varepsilon^2 \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1(B_{\varepsilon^{r-1}}(0))}.$$

Also ist mit (5.42)

$$\|T_2\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \delta \varepsilon^{-2r} \left(\|\widehat{B}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}}^3 + \varepsilon^2 \|\widehat{B}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}}^2 + \varepsilon^3 \|\widehat{B}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}} + \varepsilon^7 \right) + h.o.t.,$$

wobei *h.o.t.* die Terme mit höherer ε -Ordnung bezeichnet und δ von $\widehat{\mathcal{D}}$ abhängt. Mit den Abschätzungen für T_1 und T_2 erhalten wir

$$\|H(\widehat{\mathcal{R}})\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \delta \left(\varepsilon^{-2r+(1-r)s_{\mathcal{D}}+3} + \varepsilon^{6-2r} + \varepsilon^{4-2r} \|\widehat{B}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}} + \varepsilon^{2-2r} \|\widehat{B}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}}^2 + \varepsilon^{-2r} \|\widehat{B}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}}^3 \right)$$

+ *h.o.t.*

Dann gilt mit $\widehat{B}_{\mathcal{S}} := \widehat{\mathcal{S}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K)$, dass wir die Differenz $H(\widehat{\mathcal{R}}) - H(\widehat{\mathcal{S}})$ abschätzen können durch

$$\begin{aligned} \|H(\widehat{\mathcal{R}}) - H(\widehat{\mathcal{S}})\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq \delta \left(\varepsilon^{4-2r} + \varepsilon^{2-2r} \left(\|\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}} + \|\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}\|_{\mathcal{X}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{-2r} \left(\|\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}}^2 + \|\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}\|_{\mathcal{X}}^2 \right) \right) \|\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}} - \widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Das heißt, die Kontraktionseigenschaft ist in dem Ball

$$\|\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}} \leq C \max\{\varepsilon^{-2r+(1-r)s_{\mathcal{D}}+3}, \varepsilon^{6-2r}\}$$

für $\varepsilon > 0$ klein genug und für ein $r \in (0, 1/2)$ erfüllt. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert damit eine eindeutige Lösung von (5.41).

Wir erhalten außerdem eine Abschätzung für $\|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$, dass

$$\|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon^{-2} \|\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{R}}\|_{\mathcal{X}} \leq \varepsilon^{4-2r}. \quad (5.43)$$

Schritt 4 (Die Komponente $\widehat{\mathcal{D}}$)

Schließlich widmen wir uns dem Term führender Ordnung $\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K)$ der Lösung $\widehat{\mathcal{B}}$ und beweisen die Existenz eines solchen $\widehat{\mathcal{D}}$ nahe an der Lösung $\widehat{\mathcal{C}}$ von (5.16). Wir benötigen, dass die Konstanten in allen Abschätzungen nur von Normen von $\widehat{\mathcal{D}}$ abhängen und nicht von Normen von $\widehat{\mathcal{R}}$. Da alle Konstanten in den bisherigen Abschätzungen polynomiell abhängig von $\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ und $\|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_{s_R}(\mathbb{R}^2)}$ sind, können wir (??) nutzen, um die Terme in Abhängigkeit von $\|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_{s_R}(\mathbb{R}^2)}$ zu eliminieren. Wir müssen sicher stellen, dass $4-2r-s_{\mathcal{R}} > 0$ ist. (Wir werden später sehen, dass die Bedingung erfüllt wird, da wir $r = 1/2$ und $s_{\mathcal{R}} = 1$ wählen werden.)

Wir schreiben Gleichung (5.25) auf dem kompakten Träger von $\widehat{\mathcal{D}}$ als

$$\left(\Omega_0 + \varepsilon^2 \Omega_1 - \Omega_{j_0}(K) \right) \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \chi_{B_{\varepsilon^r}(0)}(K) \vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{\mathcal{N}} \left(\frac{\widehat{\mathcal{B}}}{\varepsilon} \right) (K) = 0 \quad (5.44)$$

mit $K \in B_{\varepsilon^r}(0)$. Wir berechnen die Taylorentwicklung von $\Omega_{j_0}(K)$ um Null. Da $\Omega_0 = \Omega_{j_0}(0)$ auf dem spektralen Rand liegt, entfällt der Term der ersten Ableitung in der Taylorentwicklung. Mit $\kappa := \frac{K}{\varepsilon}$ wird (5.44) zu

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon^2 \Omega_1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \kappa^T D^2 \Omega_{j_0}(0) \kappa \right) \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}}(\kappa) + \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}(\varepsilon \kappa) \vec{\eta}^{(j_0)*}(\varepsilon \kappa) \widehat{\mathcal{N}} \left(\frac{\widehat{\mathcal{B}}}{\varepsilon} \right) (\varepsilon \kappa) \\ + \varepsilon^{-1} \delta(\varepsilon \kappa) \widehat{\mathcal{D}}(\kappa) = 0, \end{aligned}$$

wobei $\delta(\kappa) := \Omega_0 + \frac{1}{2} \kappa^T D^2 \Omega_{j_0}(\kappa) - \Omega_{j_0}(\kappa)$ ist und es gilt, dass

$$\delta(k) \leq c|\varepsilon \kappa|^3 \quad (5.45)$$

für alle $\kappa \in B_{\varepsilon^{r-1}}(0)$.

Die obige Gleichung schreiben wir als

$$\begin{aligned} & \left(\Omega_1 - \frac{1}{2} \kappa^T D^2 \Omega_{j_0}(0) \kappa \right) \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}}(\kappa) + \varepsilon^{-2} \chi_{B_{\varepsilon r}(0)}(\varepsilon \kappa) \vec{\eta}^{(j_0)*}(\varepsilon \kappa) \widehat{N} \left(\widehat{B}_P \right) (\varepsilon \kappa) \\ & + \varepsilon^{-2} \chi_{B_{\varepsilon r}(0)}(\varepsilon \kappa) \left(\vec{\eta}^{(j_0)*}(\varepsilon \kappa) \left(\widehat{N} \left(\widehat{B} \right) - \widehat{N} \left(\widehat{B}_P \right) \right) (\varepsilon \kappa) + \varepsilon^{-1} \delta(\varepsilon \kappa) \widehat{\mathcal{D}}(\kappa) \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nun schätzen wir den Term $\varepsilon^{-1} \delta(\varepsilon \kappa) \widehat{\mathcal{D}}(\kappa)$ ab. Mit (5.45) ist

$$\begin{aligned} \|\varepsilon^{-1} \delta(\varepsilon \cdot) \widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(B_{\varepsilon r-1}(0))} & \leq c \varepsilon^2 \int_{B_{\varepsilon r-1}(0)} |\widehat{\mathcal{D}}(\kappa)| |\kappa|^3 d\kappa \\ & \leq c \varepsilon^2 \sup_{\kappa \in B_{\varepsilon r-1}(0)} |\kappa|^\beta \int_{\mathbb{R}^2} |\kappa|^{3-\beta} |\widehat{\mathcal{D}}| d\kappa \\ & \leq c \varepsilon^{2-\beta(1-r)} \|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1_{3-\beta}} \end{aligned}$$

für ein $\beta \in [0, 3]$.

Wir betrachten den zweiten Term in (5.46). Es ist

$$\begin{aligned} \vec{\eta}^{(j_0)*}(K) \widehat{N} \left(\widehat{B}_P \right) (K) & = \sum_{l=1}^4 \vec{\eta}_l^{(j_0)*}(K) \widehat{N}_l \left(\widehat{B}_P \right) (K) \\ & = \sum_{l=1}^4 \vec{\eta}_l^{(j_0)*}(K) \widehat{N}_l \left(\left(\varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \right) \vec{\eta}^{(j_0)}(K) \right) \\ & = \varepsilon^{-3} \Gamma \left(\widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) * \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) * \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) (K) + \Gamma F(K) + G(K), \end{aligned}$$

mit Γ aus (5.16). Weiter ist

$$F(K) = 2\varepsilon^{-2} \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) * \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) * \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \varepsilon^{-2} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) * \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) * \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + h.o.t.,$$

wobei *h.o.t.* die Terme höherer Ordnung in $\widehat{\mathcal{R}}$ beschreibt. Dabei ist $G(K)$ eine Summe, welche Terme der Form

$$\tilde{G}(K) = \int_{B_{2\varepsilon r}(0)} \int_{B_{\varepsilon r}(0)} \left(\beta^{(l_1, l_2, l_3, j)}(K, K-h, h-l, l) - \Gamma \right) \Psi(K-h) \bar{\Psi}(h-l) \Psi(l) dl dh$$

enthält, wobei

$$\beta^{(l_1, l_2, l_3, j)}(K, K-h, h-l, l) := \gamma_{k, l_j} \eta_j^{(j_0)*}(K) \left(\eta_{l_1}^{(j_0)}(K-h) \bar{\eta}_{l_2}^{(j_0)}(h-l) \eta_{l_3}^{(j_0)}(l) \right)$$

mit $l, l_1, l_2, l_3 \in \{1, \dots, 4\}$. Dabei werden die Summanden durch die Nichtlinearität von (5.3) bestimmt. Beachte, dass $\Gamma = \beta(0, 0, 0, 0)$. Um $\tilde{G}(K)$ abzuschätzen, setzen wir den Ansatz $\Psi(K) = \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{\mathcal{R}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right)$ in $G(K)$ ein und nutzen $\frac{K}{\varepsilon} = \kappa$, sowie $\tilde{l} = \varepsilon^{-1} l$ und $\tilde{h} = \varepsilon^{-1} h$. Dann ist

$$\tilde{G}(\varepsilon \kappa) = \varepsilon^4 \int_{B_{2\varepsilon r-1}(0)} \int_{B_{\varepsilon r-1}(0)} g d\tilde{l} d\tilde{h}$$

mit

$$g = \left(\beta(\varepsilon\kappa, \varepsilon(\kappa - \tilde{h}), \varepsilon(\tilde{h} - \tilde{l}), \varepsilon\tilde{l}) - \Gamma \right) \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}(\kappa - \tilde{h}) \left(\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{D}}(\kappa - \tilde{h}) + \widehat{\mathcal{R}}(\kappa - \tilde{h}) \right) \\ \times \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}(\tilde{h} - \tilde{l}) \left(\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{D}}(\tilde{h} - \tilde{l}) + \widehat{\mathcal{R}}(\tilde{h} - \tilde{l}) \right) \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}(\tilde{l}) \left(\varepsilon^{-1}\widehat{\mathcal{D}}(\tilde{l}) + \widehat{\mathcal{R}}(\tilde{l}) \right).$$

Weil $K \rightarrow \vec{\eta}^{(j_0)}(K)$ analytisch in jeder Komponente ist, ist der Koeffizient β lipschitzstetig in jeder Variablen, das heißt

$$|\beta(\varepsilon\kappa, \varepsilon(\kappa - \tilde{h}), \varepsilon(\tilde{h} - \tilde{l}), \varepsilon\tilde{l}) - \beta(0, 0, 0, 0)| \leq c\varepsilon \left(|\kappa| + |\kappa - \tilde{h}| + |\tilde{h} - \tilde{l}| + |\tilde{l}| \right) \\ \leq 2c\varepsilon \left(|\kappa - \tilde{h}| + |\tilde{h} - \tilde{l}| + |\tilde{l}| \right).$$

Das führt zu der Abschätzung

$$|G(\varepsilon\kappa)| \leq c\varepsilon^2 \left(2|\kappa(\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{R}})| * |\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{R}}| * |\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{R}}| + |\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{R}}| * |\kappa(\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{R}})| * |\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{R}}| \right) (\kappa).$$

Mit der Young-Ungleichung für Faltungen erhalten wir

$$\|G(\varepsilon\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon^2 \|\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_1(\mathbb{R}^2)} \|\widehat{\mathcal{D}} + \widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \\ \leq c\varepsilon^2 \left(\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1_1(\mathbb{R}^2)} + \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1_1(\mathbb{R}^2)} \right)^3 \\ \leq c\varepsilon^2$$

wegen

$$\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\kappa|)^{-1} (1 + |\kappa|) |\widehat{\mathcal{D}}| \, d\kappa \leq \|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1_1(\mathbb{R}^2)}.$$

Nun möchten wir F abschätzen. Es ist

$$\|F(\varepsilon\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon^{-2}\varepsilon^6 \|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 \|\widehat{\mathcal{R}}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ \leq c\varepsilon^4.$$

Schließlich ist

$$\left\| \vec{\eta}^{(j_0)*}(\varepsilon\cdot) \left(\widehat{N} \left(\widehat{B} \right) - \widehat{N} \left(\widehat{B}_P \right) \right) \right\|_{\mathcal{X}} \\ \leq c \|\vec{\eta}^{(j_0)*}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| \widehat{N}_l \left(\widehat{B} \right) - \widehat{N}_l \left(\widehat{B}_P \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ \leq c\varepsilon^5$$

mit (5.37), wobei c polynomiell von $\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1_{s_D}}$ abhängt.

Mit diesen Abschätzungen sehen wir, dass die Abschätzung von $\|\delta(\varepsilon\cdot)\widehat{\mathcal{D}}\|$ den Term führender Ordnung liefert. Damit ist (5.46)

$$\left(\Omega_1 - \frac{1}{2}\kappa^T D^2 \Omega_{j_0}(0)\kappa \right) \widehat{\mathcal{D}}(\kappa) + \Gamma(\widehat{\mathcal{D}} * \widehat{\mathcal{D}} * \widehat{\mathcal{D}})(\kappa) =: \widehat{r}(\widehat{\mathcal{D}})(\kappa), \quad (5.47)$$

wobei der Restterm \widehat{r} mit $\text{supp}(\widehat{r}) \subset B_{\varepsilon^{r-1}}(0)$ die Form

$$\widehat{r}\left(\frac{K}{\varepsilon}\right) = -\varepsilon^{-1}(\Gamma F(K) + G(K)) - \varepsilon^{-1}\chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}\left(\vec{\eta}^{(j_0)} * \left(\widehat{N}(\widehat{B}) - \widehat{N}(\widehat{B}_P)\right) + \varepsilon^{-1}\delta(\varepsilon\kappa)\widehat{\mathcal{D}}\right)$$

hat. Mit den obigen Abschätzungen und einer Wahl von $r = 1/2$, $\beta = 1$ und $s_{\mathcal{D}} = 2$ erhalten wir

$$\|\varepsilon^{-1}\delta(\varepsilon\cdot)\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1(B_{\varepsilon^{r-1}}(0))} \leq c\varepsilon^{3/2}\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1_2(\mathbb{R}^2)}$$

und damit insbesondere, dass $\|\widehat{r}(\widehat{\mathcal{D}})\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon^{3/2}$. Die Konstante c hängt nur von $\|\widehat{\mathcal{D}}\|_{L^1_2(\mathbb{R}^2)}$ ab. Wir definieren

$$\text{NLS}(\widehat{\mathcal{D}})(\kappa) := \left(\Omega_1 + \frac{1}{2}\kappa^T D^2 \Omega_{j_0}(0)\kappa\right)\widehat{\mathcal{D}}(\kappa) + \Gamma(\widehat{\mathcal{D}} * \widehat{\mathcal{D}} * \widehat{\mathcal{D}})(\kappa)$$

und damit schreiben wir

$$\text{NLS}(\widehat{\mathcal{D}})(\kappa) = \widehat{r}(\widehat{\mathcal{D}})(\kappa), \quad \kappa \in B_{\varepsilon^{r-1}}(0),$$

wobei $\text{supp}(\widehat{\mathcal{D}}) \subset B_{\varepsilon^{r-1}}(0)$. Wir suchen eine Lösung $\widehat{\mathcal{D}}$, so dass \mathcal{D} nahe an der Lösung C von $\text{NLS}(C) = 0$ ist. Deshalb setzen wir

$$\widehat{\mathcal{D}} = \widehat{C}^\varepsilon + \widehat{d},$$

mit $\widehat{C}^\varepsilon = \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}\widehat{C}$ und $\text{supp}(\widehat{d}) \subset B_{\varepsilon^{r-1}}(0)$. Schließlich schreiben wir (5.47) als

$$\widehat{J}_\varepsilon \widehat{d} = \widehat{W}(\widehat{d}), \quad (5.48)$$

wobei

$$\begin{aligned} \widehat{J}_\varepsilon(\kappa) &:= \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}(\kappa) D_{\widehat{C}} \text{NLS}(\widehat{C}^\varepsilon)(\kappa) \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}, \\ \widehat{W}(\widehat{d})(\kappa) &:= \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}(\kappa) \widehat{r}(\widehat{C}^\varepsilon + \widehat{d})(\kappa) - \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}(\kappa) \left(\text{NLS}(\widehat{C}^\varepsilon + \widehat{d}) - \widehat{J}_\varepsilon \widehat{d}\right)(\kappa). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $D_{\widehat{C}} \text{NLS}$ die Jacobi Matrix von $\text{NLS}(\widehat{C})$.

Bemerkung 5.7. Die Bezeichnung der Jacobi Matrix $D_{\widehat{C}} \text{NLS}(\widehat{C}^\varepsilon)$ ist vorerst symbolisch zu verstehen, da $\text{NLS}(\widehat{C}^\varepsilon)$ nicht komplex differenzierbar ist. Die Gleichung ist jedoch in reellen Variablen differenzierbar, nachdem wir sie in den Real- und Imaginärteil aufgeteilt haben.

Wir schreiben $\mathcal{D} = \mathcal{D}_R + i\mathcal{D}_I$, $C = C_R + iC_I$ und $d = d_R + id_I$ und definieren

$$\text{NLS}(\mathcal{D}_R, \mathcal{D}_I) := \begin{pmatrix} \text{Re}(\text{NLS}(\mathcal{D}_R + i\mathcal{D}_I)) \\ \text{Im}(\text{NLS}(\mathcal{D}_R + i\mathcal{D}_I)) \end{pmatrix}.$$

\widehat{J}_ε angewendet auf einen Vektor $\vec{\varphi}$ hat die Form

$$\widehat{J}_\varepsilon \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_1 \\ \widehat{\varphi}_2 \end{pmatrix}(\kappa) := \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)}(\kappa) \begin{pmatrix} (\Omega_1 - \frac{1}{2}\kappa^T D^2 \Omega_{j_0} \kappa) \widehat{\varphi}_1 + \Gamma(3\widehat{C}_R^\varepsilon * \widehat{C}_R^\varepsilon + \widehat{C}_I^\varepsilon * \widehat{C}_I^\varepsilon) * \widehat{\varphi}_1 \\ + 2\Gamma\widehat{C}_I^\varepsilon * \widehat{C}_R^\varepsilon * \widehat{\varphi}_2 \\ (\Omega_1 - \frac{1}{2}\kappa^T D^2 \Omega_{j_0} \kappa) \widehat{\varphi}_2 + \Gamma(3\widehat{C}_I^\varepsilon * \widehat{C}_I^\varepsilon + \widehat{C}_R^\varepsilon * \widehat{C}_R^\varepsilon) * \widehat{\varphi}_2 \\ + 2\Gamma\widehat{C}_I^\varepsilon * \widehat{C}_R^\varepsilon * \widehat{\varphi}_1 \end{pmatrix}$$

für $\widehat{\varphi} \in X_{s_D}^{\text{sym}}(\mathbb{R}^d)$. Es ist $\widehat{C}_R^\varepsilon = \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)} \widehat{C}_R$ mit C_R Realteil von C , sowie $\widehat{C}_I^\varepsilon = \chi_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)} \widehat{C}_I$ mit C_I Imaginärteil von C .

Unser Ziel ist es, (5.48) mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes zu lösen. Dafür schreiben wir die Fixpunktgleichung

$$\widehat{d} = \widehat{J}_\varepsilon^{-1} \widehat{W}(\widehat{d}). \quad (5.49)$$

Es gibt für (5.16) die drei Invarianzen

$$\begin{aligned} C(\xi) &\rightarrow C(\xi_1 + \rho, \xi_2), \\ C(\xi) &\rightarrow C(\xi_1, \xi_2 + \rho), \\ C(\xi) &\rightarrow C(\xi) e^{i\rho} \end{aligned}$$

mit $\rho \in \mathbb{R}$. Die drei Symmetrien implizieren drei Nulleigenwerte von \widehat{J}_0 und die Eigenvektoren $\partial_{X_1} C$, $\partial_{X_2} C$ und C . Da der Kern von \widehat{J}_0 nicht trivial ist, kann $\widehat{J}_\varepsilon^{-1}$ nicht unabhängig von ε beschränkt sein. Die Lösung ist, dass wir einen Unterraum konstruieren, welcher durch die Symmetrie der nichtlinearen Schrödingergleichung definiert ist, in dem die Invarianzen nicht länger gelten, so dass \widehat{J}_0 invertierbar ist.

Daher lösen wir das Fixpunktproblem (5.49) für \widehat{d} in dem Unterraum

$$X_{s_D}^{\text{sym}} := \{u \in L_{s_D}^1(\mathbb{R}^2) \mid \widehat{u}(\kappa) \text{ reell } \forall \kappa \in \mathbb{R}^2, \text{supp}(\widehat{u}) \subset B_{\varepsilon^{r-1}}(0)\}. \quad (5.50)$$

In $X_{s_D}^{\text{sym}}$ gilt die sogenannte \mathcal{PT} -Symmetrie. Insbesondere gilt, falls $C, d \in X_{s_D}^{\text{sym}}$, dass

$$C(\xi) = \overline{C(-\xi)} \text{ und } d(\xi) = \overline{d(-\xi)}.$$

Beachte, dass $\widehat{J}_0, \widehat{J}_\varepsilon : L_q^1(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_{q-2}^1(\mathbb{R}^2)$ für ein $q \geq 2$. Wie oben beschrieben ist der Kern von J dreidimensional, so dass \widehat{J}_0^{-1} beschränkt in $X_{s_D}^{\text{sym}}$ für ein $s_D \geq 2$ ist. Da \widehat{J}_ε eine Störung von \widehat{J}_0 ist, müssen wir sicher stellen, dass Null kein Eigenwert von \widehat{J}_ε ist. Dafür nutzen wir ein spektrales Stabilitätsresultat von Kato [Kat95]. Angewendet auf unser Problem lautet er wie folgt:

Satz 5.8 (Kato, '95). *Wenn es Konstanten $a, b \geq 0$ gibt, so dass*

$$\|(\widehat{J}_\varepsilon - \widehat{J}_0)\widehat{\varphi}\|_{L_{s_{D-2}}^1} \leq a\|\widehat{\varphi}\|_{L_{s_{D-2}}^1} + b\|\widehat{J}_0\widehat{\varphi}\|_{L_{s_{D-2}}^1} \quad \forall \widehat{\varphi} \in X_q^{\text{sym}}$$

und wenn für ein $\xi \in \rho(J_0)$ gilt, dass

$$a\|(\widehat{J}_0 - \xi)^{-1}\|_{L_{s_{D-2}}^1 \rightarrow L_{s_D}^1} + b\|\widehat{J}_0(\widehat{J}_0 - \xi)^{-1}\|_{L_{s_{D-2}}^1 \rightarrow L_{s_D}^1} \leq 1,$$

dann ist $\xi \in \rho(\widehat{J}_\varepsilon)$ und

$$\begin{aligned} \|(\widehat{J}_\varepsilon - \xi)^{-1}\|_{L_{s_{D-2}}^1 \rightarrow L_{s_D}^1} &\leq \|(\widehat{J}_0 - \xi)^{-1}\|_{L_{s_{D-2}}^1 \rightarrow L_{s_D}^1} \left(1 - a\|(\widehat{J}_0 - \xi)^{-1}\|_{L_q^1} \right. \\ &\quad \left. - b\|\widehat{J}_0(\widehat{J}_0 - \xi)^{-1}\|_{L_{s_{D-2}}^1 \rightarrow L_{s_D}^1} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet ρ die Resolventenmenge.

Beweis. Für den Beweis siehe [Kat95, S.214]. \square

Mit diesem Satz zeigen wir nun, dass

$$0 \in \varrho\left(\widehat{J}_0|_{X_{s_D}^{\text{sym}}}\right) \Rightarrow 0 \in \varrho\left(\widehat{J}_\varepsilon|_{X_{s_D}^{\text{sym}}}\right).$$

Wir prüfen die Voraussetzungen von Satz 5.8. Für $\widehat{d} \in X_{s_D}^{\text{sym}}$

$$\begin{aligned} \left\|(\widehat{J}_\varepsilon - \widehat{J}_0)\widehat{d}\right\|_{L_{s_{D-2}}^1} &= |\Gamma| \left\|(\widehat{C}_R^\varepsilon * \widehat{C}_R^\varepsilon - \widehat{C}_R * \widehat{C}_R) * (3\widehat{d}_R + \widehat{d}_I)\right. \\ &\quad + (\widehat{C}_I^\varepsilon * \widehat{C}_I^\varepsilon - \widehat{C}_I * \widehat{C}_I) * (3\widehat{d}_I + \widehat{d}_R) \\ &\quad \left.+ 2(\widehat{C}_R^\varepsilon * \widehat{C}_I^\varepsilon - \widehat{C}_R * \widehat{C}_I) * (\widehat{d}_R + \widehat{d}_I)\right\|_{L_{s_{D-2}}^1}. \end{aligned}$$

Wir schreiben $\widehat{C}_R^\varepsilon = \widehat{C}_R + \widehat{\delta}_R$ und $\widehat{C}_I^\varepsilon = \widehat{C}_I + \widehat{\delta}_I$. Dann ist $\text{supp}(\widehat{\delta}_{R,I}) \subset B_{\varepsilon^{r-1}}(0)$. Die Differenz $(\widehat{J}_\varepsilon - \widehat{J}_0)\widehat{d}$ besteht aus Termen, die linear oder quadratisch in $\widehat{\delta}_{R,I}$ sind, zum Beispiel $\widehat{\delta}_R * \widehat{C}_R^\varepsilon * \widehat{d}_R$. Weil

$$\begin{aligned} \|\widehat{\delta}_{R,I}\|_{L_{s_{D-2}}^1} &= \int_{B_{\varepsilon^{r-1}}(0)} (1 + |\kappa|)^{s_{D-2}} |\widehat{\delta}_{R,I}(\kappa)| \, d\kappa \\ &\leq \sup_{|\kappa| > \varepsilon^{r-1}} \frac{1}{(1 + |\kappa|)^2} \|\widehat{\delta}_{R,I}\|_{L_{s_D}^1} \\ &\leq \varepsilon^{2(1-r)} \|\widehat{\delta}_{R,I}\|_{L_{s_D}^1} \end{aligned}$$

gilt, ist mit der Young-Ungleichung für Faltungen

$$\left\|(\widehat{J}_\varepsilon - \widehat{J}_0)\widehat{d}\right\|_{L_{s_{D-2}}^1} \leq c \left(\|C\|_{L_{s_D}^1}\right) \varepsilon^{2(1-r)} \|\widehat{d}\|_{L_{s_{D-2}}^1},$$

wobei c polynomiell von C abhängt. Die Voraussetzungen von Satz 5.8 sind demnach für $a = c\varepsilon^{2(1-r)}$ und $b = 0$ für ε klein genug und für $\xi = 0$ erfüllt. Für das Lösen des Fixpunktproblems nutzen wir die Wahl von $r = 1/2$ und $s_D = 2$. Wir zeigen, dass für $\widehat{C} \in X_2^{\text{sym}}$ ein $c > 0$ existiert, so dass $\widehat{J}_\varepsilon^{-1}\widehat{W} : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B}^2$ mit

$$\mathcal{B}^\alpha := \left\{\widehat{d} \in X_\alpha^{\text{sym}} \mid \|\widehat{d}\|_{L_\alpha^1(\mathbb{R}^2)} \leq c\varepsilon^{3/2}\right\}.$$

Das heißt wir zeigen die Selbstabbildungseigenschaft. Weiter zeigen wir, dass $\widehat{J}_\varepsilon^{-1}\widehat{W}$ eine Kontraktion ist unter der Voraussetzung, dass

$$\widehat{C} \in \left\{\widehat{f} \in L_2^1(\mathbb{R}^2) : \text{Im}(\widehat{f}_R) = -\text{Re}(\widehat{f}_I)\right\}.$$

Als erstes zeigen wir, dass $\widehat{J}_\varepsilon : X_2^{\text{sym}} \rightarrow X_0^{\text{sym}}$. Der Verlust von 2 im Gewicht liegt an dem Faktor $\frac{1}{2}\kappa^T D^2 \Omega_{j_0}(0)\kappa$. Die \mathcal{PT} -Symmetrie wird von den Termen $\Omega_1 - \frac{1}{2}\kappa^T D^2 \Omega_{j_0}(0)\kappa$ erhalten. Für die Faltungsterme ergibt sich zum Beispiel

$$\text{Im}(\widehat{C}_R) = -\text{Re}(\widehat{C}_I) \Rightarrow \text{Im}(\widehat{C}_R^\varepsilon) = -\text{Re}(\widehat{C}_I^\varepsilon)$$

und daraus folgt $C^\varepsilon(-X) = C^\varepsilon(X)$ für alle X . Deshalb sind die Terme $(C_R^\varepsilon)^2 d_R$, $(C_I^\varepsilon)^2 d_R$ und $C_R^\varepsilon C_I^\varepsilon d_I$ gerade und die Terme $(C_I^\varepsilon)^2 d_I$, $(C_R^\varepsilon)^2 d_I$ und $C_R^\varepsilon C_I^\varepsilon d_R$ ungerade, so dass die \mathcal{PT} -Symmetrie auch in den Faltungstermen erhalten bleibt.

Mit $\text{Im}((\widehat{J}_\varepsilon \widehat{d})_1) = -\text{Re}((\widehat{J}_\varepsilon \widehat{d})_2)$ gilt schließlich

$$\widehat{J}_\varepsilon : X_2^{\text{sym}} \rightarrow X_0^{\text{sym}}$$

und für $\widehat{J}_\varepsilon^{-1}$ erhalten wir $\widehat{J}_\varepsilon^{-1} : X_0^{\text{sym}} \rightarrow X_2^{\text{sym}}$.

Nun zeigen wir, dass $\widehat{W} : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B}^0$, falls $\widehat{C} \in X_2^{\text{sym}}$. Die Ordnung $\varepsilon^{3/2}$ wird dabei durch die Abschätzung des Terms $\widehat{r}(\kappa)$ oben vorgegeben.

Die Differenz NLS $\left(\widehat{C}^\varepsilon + \widehat{d}\right) - \widehat{J}\widehat{d}$ besteht aus Termen, die quadratisch in \widehat{d} sind und ist

daher beschränkt in $L^1(\mathbb{R}^2)$ durch $(c_1 \|\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^3)$.

Insgesamt erhalten wir

$$\|\widehat{W}\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq c_2 \left(c\varepsilon^{3/2} + \|\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^2 + \|\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^3 \right) \leq c\varepsilon^{3/2}.$$

Wegen der Beschränktheit von $\widehat{J}_\varepsilon^{-1} : X_0^{\text{sym}} \rightarrow X_2^{\text{sym}}$ haben wir

$$\widehat{J}_\varepsilon^{-1}\widehat{W} : \mathcal{B}^2 \rightarrow \mathcal{B}^2.$$

Zusammengefasst bedeutet das:

Wenn C Lösung der NLS ist mit $\widehat{C} \in \left\{ \widehat{f} \in L_2^1(\mathbb{R}^2) \mid \text{Im}(\widehat{f}_R) = -\text{Re}(\widehat{f}_R) \right\}$, dann existiert ein $c > 0$, so dass für alle $\varepsilon > 0$ klein genug die konstruierte Lösung \mathcal{D} erfüllt, dass $\widehat{\mathcal{D}} \in \left\{ \widehat{f} \in L_2^1(\mathbb{R}^2) \mid \text{Im}(\widehat{f}_R) = -\text{Re}(\widehat{f}_R) \right\}$ und

$$\|\widehat{\mathcal{D}} - \widehat{C}^\varepsilon\|_{L_2^1(\mathbb{R}^2)} \leq c(\|\widehat{C}\|_{L_2^1(\mathbb{R}^2)})\varepsilon^{3/2}.$$

Zur Erinnerung: Für die Aussage von Satz 5.5 wollen wir zeigen, dass

$$\|\vec{B} - \vec{B}_{\text{app}}\|_{C_b^0} < c\varepsilon^{3/2}$$

mit $\delta > 0$ für $\vec{B}_{\text{app}} = \varepsilon C(\varepsilon X) \vec{\eta}^{(j_0)}(0)$ gilt, da der Ansatz selbst in der Supremumsnorm durch $\|\vec{B}_{\text{app}}\|_{C_b^0} \leq c\varepsilon$ abgeschätzt werden kann. Der Fehler zur Lösung B muss also einer höheren ε -Potenz entsprechen.

Im Fourierraum suchen wir deshalb eine Abschätzung für $\|\widehat{B} - \widehat{B}_{\text{app}}\|_{\mathcal{X}}$. Mit der Dreiecksungleichung, den Zerlegungen (5.20) und (5.28) sowie den Definitionen (5.39) und (5.40) ist

$$\begin{aligned} \|\widehat{B} - \widehat{B}_{\text{app}}\|_{\mathcal{X}} &= \|\widehat{B}_{\mathcal{D}} + \widehat{B}_R + \widehat{B}_{Q,1} + \widehat{B}_{Q,R} - \widehat{B}_{\text{app}}\|_{\mathcal{X}} \\ &\leq \|\widehat{B}_{\text{app}} - \widehat{B}_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{X}} + \|\widehat{B}_R\|_{\mathcal{X}} + \|\widehat{B}_{Q,1}\|_{\mathcal{X}} + \|\widehat{B}_{Q,R}\|_{\mathcal{X}}. \end{aligned}$$

Das heißt, mit (5.43), (5.35) und (5.38) bleibt noch die Differenz $\|\widehat{B}_{\text{app}} - \widehat{B}_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{X}}$ mit $\widehat{B}_{\text{app}} = \varepsilon^{-1} \widehat{C} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \overrightarrow{\eta}^{(j_0)}(0)$ abzuschätzen.

Nach unseren Definitionen gilt für alle $K \in \mathbb{R}^2$, dass

$$\widehat{B}_{\mathcal{D}}(K) := \varepsilon^{-1} \widehat{\mathcal{D}} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \overrightarrow{\eta}^{(j_0)}(K) = \varepsilon^{-1} \left(\chi_{B_{\varepsilon r}(0)}(K) \widehat{C} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) + \widehat{d} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \right) \overrightarrow{\eta}^{(j_0)}(K).$$

Dann ist mit der Taylorentwicklung von $\eta_l^{(j_0)}(K)$ um Null

$$\begin{aligned} \|\widehat{B}_{\text{app}} - \widehat{B}_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{X}} &= \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \left\| \varepsilon^{-1} \widehat{C} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \eta_l^{(j_0)}(0) - \varepsilon^{-1} \left(\chi_{B_{\varepsilon r}(0)} \widehat{C} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) + \widehat{d} \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right) \eta_l^{(j_0)}(\cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq c\varepsilon \|\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \int_{B_{\varepsilon r}(0)} \varepsilon^{-1} \left| \widehat{C} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \right| |\eta_l^{(j_0)}(0) - \eta_l^{(j_0)}(K)| dK \\ &\quad + \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \eta_l^{(j_0)} \int_{\mathbb{R}^2} \varepsilon^{-1} (1 - \chi_{B_{\varepsilon r}(0)}(K)) \left| \widehat{C} \left(\frac{K}{\varepsilon} \right) \right| dK \\ &\leq c\varepsilon \|\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + c\varepsilon^2 \max_{l \in \{1, \dots, 4\}} \int_{B_{\varepsilon r-1}(0)} |\kappa| |\widehat{C}(\kappa)| d\kappa \\ &\quad + \varepsilon \sup_{\kappa \in B_{\varepsilon r-1}(0)} (1 + |\kappa|^{-s_C}) \int_{\kappa \in \mathbb{R}^2 \setminus B_{\varepsilon r-1}(0)} (1 + |\kappa|^{s_C}) |\widehat{C}(\kappa)| d\kappa \\ &\leq c\varepsilon \|\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \varepsilon^2 \|\widehat{C}\|_{L^1_1(\mathbb{R}^2)} + \varepsilon^{1+s_C(1-r)} \|\widehat{C}\|_{L^1_{s_C}(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Wir wählen $s_C = 1$ und $r = 1/2$, so dass mit $\|\widehat{d}\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq c_1 \varepsilon^r$ gilt, dass

$$\|\widehat{B}_{\text{app}} - \widehat{B}_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{X}} \leq c_C \varepsilon^{3/2},$$

wobei c_C polynomiell von $\|\widehat{C}\|_{L^1_1(\mathbb{R}^2)}$ abhängt. Damit haben wir die Behauptung aus Satz 5.5 gezeigt. \square

Wir konnten also mit der Asymptotik aus Abschnitt 5.1 zeigen, dass lokalisierte Solitärwellen für die Coupled Mode Gleichungen existieren.

5.4 Bewegliche Lösungen in höheren Dimensionen

Wir fragen uns, ob es möglich ist, bewegliche lokalisierte Lösungen für die Coupled Mode Gleichungen auch in höheren Dimensionen zu finden. Der einfachste Ansatz für bewegliche Solitärwellen der zeitabhängigen Coupled Mode Gleichungen (3.10) lautet

$$\vec{A}(X, T) = \vec{B}_c(X - cT)e^{-i\Omega^{(c)}T} \quad (5.51)$$

mit einem $c \in \mathbb{R}^d$, $\Omega^{(c)} \in \mathbb{R}$ und einem lokalisierten $\vec{B}_c : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}^N$, das heißt $|\vec{B}_c(Y)| \rightarrow 0$ für $|Y| \rightarrow \infty$. Wir nennen (5.51) den „moving frame“ Ansatz. Dabei soll \vec{B}_c die Gleichung

$$\Omega^{(c)}\vec{B}_c = (M(\nabla) + ic \cdot \nabla)\vec{B}_c - \vec{N}(\vec{B}_c) \quad (5.52)$$

mit

$$M(\nabla) = \begin{pmatrix} -iv_g^{(1)} \cdot \nabla + \kappa_{11} & \kappa_{12} & \dots & \kappa_{1N} \\ \overline{\kappa_{12}} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \overline{\kappa_{1N}} & \dots & & -iv_g^{(N)} \cdot \nabla + \kappa_{NN} \end{pmatrix}$$

erfüllen. Die zugehörige Dispersionsrelation $K \mapsto \Omega^{\text{vel}}(K) \in \mathbb{R}^n$ liefert die N Eigenwerte $\Omega_j^{\text{vel}}(K)$, $j = 1, \dots, N$, wobei

$$\Omega_j^{\text{vel}}(K) = \Omega_j^{(0)}(K) - c \cdot K, K \in \mathbb{R}^d, j \in \{1, \dots, N\}.$$

Ein exponentiell lokalisiertes B_c erwarten wir in der spektralen Lücke

$$\Omega^{(c)} \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j=1}^N \Omega_j^{\text{vel}}(\mathbb{R}^d).$$

Wir zeigen zunächst, dass wenn für ein j_* und eine Richtung $\xi \in \mathbb{R}^d$, welche nicht orthogonal zu c ist, gilt, dass $(\Omega^{(0)})_{j_*}$ konstant verläuft, dann muss $\Omega_{j_*}^{\text{vel}}(\mathbb{R}\xi)$ ganz \mathbb{R} umfassen. Das folgende Lemma enthält die obige Aussage [DW18].

Lemma 5.9. *Sei $c \in \mathbb{R}^d$. Wenn für ein $j_* \in \{1, \dots, N\}$ und eine Richtung $\xi \in \mathbb{R}^d$ mit $\xi^T c \neq 0$ gilt, dass $(\Omega^{(0)})_{j_*} \rightarrow \text{const.}$ für $K = r\xi$, $r \in \mathbb{R}$ und $r \rightarrow \pm\infty$, dann ist*

$$\Omega_{j_*}^{\text{vel}}(\mathbb{R}\xi) = \mathbb{R}. \quad (5.53)$$

Das heißt, wir haben keine spektrale Lücke in (5.52).

Beweis. Der Graph $K \mapsto c \cdot K$ ist eine Hyperebene in \mathbb{R}^{d+1} . Wenn jetzt der Eigenwert $(\Omega^{(0)})_{j_*}$, $j_* \in \{1, \dots, N\}$ asymptotisch horizontal entlang einer Richtung $\xi \in \mathbb{R}^d$ verläuft, welche nicht orthogonal zu c ist, dann ist

$$\Omega_{j_*}^{\text{vel}}(K) \rightarrow \infty \text{ für } r \rightarrow \infty \text{ oder } r \rightarrow -\infty$$

und in die gegenläufige Richtung geht $\Omega_{j_*}^{\text{vel}}(K) \rightarrow -\infty$. Mit dem Zwischenwertsatz folgt dann Behauptung (5.53). \square

Wir haben in Kapitel 4.1 gezeigt, dass wir für $N \leq 3$ in $d = 2$ keine lokalisierten Solitärwellen erwarten können, da der Graph der Dispersionsrelation nicht die gewünschten Eigenschaften aufweist. Für $N = 4$ erhalten wir im symmetrischen Fall zwar die gewünschte Struktur und können auch lokalisierte Solitärwellen finden, diese sind jedoch zeitharmonisch. Mit dem folgenden Lemma zeigen wir, dass die horizontale Asymptotik aus Lemma 5.9 für diesen Fall immer erfüllt ist [DW18].

Lemma 5.10. *Sei $N = 4$, $d = 2$ und sei M_α wie in (5.2).*

Dann existiert für jedes $\gamma \in \mathbb{R} \setminus (-|\alpha_1|, |\alpha_1|)$ eine Richtung $\theta \in (-\pi, \pi]$ und ein $j \in \{1, \dots, 4\}$, so dass $\Omega_j^{(0)}((r \cos(\theta), r \sin(\theta))) \rightarrow \gamma$ für $r \rightarrow \infty$.

Beweis. Wir schreiben $K_\xi = r \cos(\theta)$ und $K_\eta = r \sin(\theta)$ mit $r > 0$ und $\theta \in (-\pi, \pi]$. Das Lemma ist bewiesen, wenn die Dispersionsrelation (4.20) eine Lösung $\theta \in (-\pi, \pi]$ für jedes $|\Omega| \geq |\alpha_1|$ und für $r > 0$ groß genug hat. Wir können Dispersionsrelation (4.20) umschreiben als

$$\left(\frac{r^2}{2} \sin(2\theta) + |\alpha_2|^2 - |\alpha_3|^2 \right)^2 = r^2(\Omega^2 - |\alpha_1|^2) - \phi,$$

wobei

$$\begin{aligned} \phi := & \Omega^4 - 2\Omega^2 \sum_{j=1}^3 |\alpha_j|^2 + 4\Omega(\Re(\bar{\alpha}_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \alpha_3)) + |\alpha_1|^4 \\ & - 2|\alpha_1|^2 \Re(\alpha_3^2) - 2\Re(\bar{\alpha}_1^2 \alpha_2^2). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\sin(2\theta) = \pm \frac{2}{r^2} \left(|\alpha_3|^2 - |\alpha_2|^2 \pm \sqrt{r^2(\Omega^2 - |\alpha_1|^2) - \phi} \right).$$

Für großes r existiert eine reelle Lösung θ , genau dann, wenn $|\Omega| \geq |\alpha_1|$. □

Abbildung 5.6 zeigt die Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen in 2D, für die ein „moving frame“ Ansatz genutzt wurde, um bewegliche Lösungen zu erhalten. Das Bild veranschaulicht die Problematik, die durch Lemma 5.9 und 5.10 gezeigt wurde, nämlich dass es keine spektrale Lücke für den Ansatz zu beweglichen Lösungen gibt.

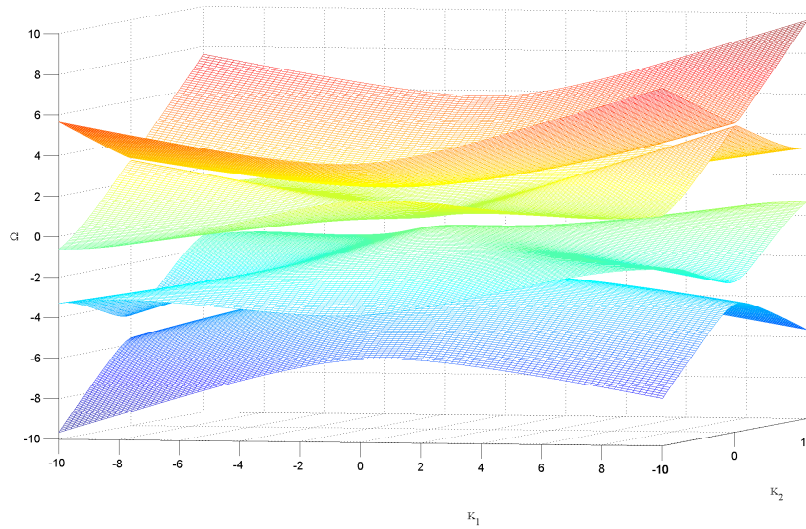


Abbildung 5.6: Dispersionsrelation für Coupled Mode Gleichungen in 2D mit einem „moving frame,, Ansatz.

Wir haben gezeigt, dass für einen Standard „moving frame“ Ansatz im Fall von $d = 2$ Dimensionen und $N = 4$ Moden keine beweglichen Lösungen für die Coupled Mode Gleichungen existieren. Für $N < 4$ haben wir bereits die Existenz von beweglichen Lösungen in Kapitel 4.1 ausgeschlossen, da die zugehörige Dispersionsrelation nicht die gewünschten Eigenschaften besaß. Der Ansatz für bewegliche Lösungen führt in jedem Fall von $N \leq 4$ zu einer Neigung des Graphen der Dispersionsrelation, wie sie in Abbildung (5.6) zu sehen ist, und damit zu einem Schließen der Lücke.

Eine Möglichkeit, um bewegliche Lösungen für die Coupled Mode Gleichungen zu finden, ist die Wahl eines anderen Ansatzes. Eine weitere Möglichkeit ist es, bewegliche Lösungen im Spektrum anstatt in der spektralen Lücke zu suchen. Weiter kann die Suche auf höhere Dimensionen d oder eine höhere Anzahl von Moden N ausgeweitet werden.

Diese weiterführenden Fragestellungen werden in der vorliegenden Arbeit allerdings nicht behandelt.

6 Approximation der periodischen nichtlinearen Schrödingergleichung in höheren Dimensionen durch die Coupled Mode Gleichungen

Die Herleitung der Coupled Mode Gleichungen in Kapitel 3 ist rein formal, da im Residuum jene Terme, welche nicht proportional zu einem periodischen Term multipliziert mit $e^{ik^{(j)} \cdot x}$ für $j = 1, \dots, N$ sind, sowie Terme aus Ableitungen in höheren Ordnungen nicht beachtet werden. In diesem Kapitel möchten wir rigoros beweisen, dass wir durch den asymptotischen Ansatz aus Abschnitt 3.2

$$u^{\text{app}}(x, t) := \varepsilon^{1/2} \sum_{j=1}^N A_j(\varepsilon x, \varepsilon t) p_{n_0}(x, k^{(j)}) e^{ik^{(j)} \cdot x} e^{-i\omega_0 t} \quad (6.1)$$

mit $N \in \mathbb{N}$ Moden eine Lösung der periodischen nichtlinearen Schrödingergleichung

$$i\partial_t u + \Delta u - (V(x) + \varepsilon W(x)) u - \sigma(x)|u|^2 u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R} \quad (6.2)$$

mit $V, \sigma \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ $2\pi\mathbb{Z}$ -periodisch und dem Potential

$$W(x) = \sum_{m=-m_0}^{m_0} a_m e^{iq_m \cdot x}, \quad m_0 \in \mathbb{N}$$

approximieren können, falls die Lösungen A_j für $j = 1, \dots, N$ der entsprechenden Coupled Mode Gleichungen (3.10) existieren.

Bemerkung 6.1. Wir konstruieren Ansatz (6.1) wie in Abschnitt 3.2 aus den Blochwellen $p_{n_0}(x, k^{(j)}) e^{ik^{(j)} \cdot x}$ für $j = 1, \dots, N$. Dafür wählen wir die Punkte $(k^{(j)}, \omega_0)$, so dass sie alle zu dem gleichen Eigenwert $\omega_0 = \omega_{n_0}(k^{(j)})$, $j = 1, \dots, N$ gehören. In der folgenden Rechtfertigung der Coupled Mode Gleichungen beschränken wir uns auf diesen Fall, da wir so übersichtliche Abschätzungen erhalten. Der allgemeine Fall mit Punkten $(k^{(j)}, \omega_{n_j})$, $j = 1, \dots, d$ wird in [DW18] behandelt, folgt jedoch im Wesentlichen den gleichen Schritten und führt zu ähnlichen Abschätzungen.

An die Potentiale in (6.2) treffen wir die folgenden grundlegenden Regularitätsannahmen.

(R1) Es sei $W \in C^a(\mathbb{R}^d)$ für $a > d$ mit $W(x + 2\pi/k_W e_j) = W(x) \forall j = 1, \dots, N, k_W > 0$.

(R2) Es sei $V \in H^{2\lceil \frac{d}{2} \rceil + d + \delta}(\mathbb{T}), \delta > 0$ mit $V(x + 2\pi e_j) = V(x) \forall j = 1, \dots, N$.

(R3) Es sei $\sigma \in H^{2\lceil \frac{d}{2} \rceil + 2}(\mathbb{T})$ mit $\sigma(x + 2\pi e_j) = \sigma(x) \forall j = 1, \dots, N$.

Wie zuvor bezeichnet \mathbb{T} den d -dimensionalen Torus. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist in dem folgenden Satz formuliert.

Satz 6.2. *Seien die Regularitätsannahmen (R1)-(R3) erfüllt und sei (A_1, \dots, A_N) Lösung von (3.10) mit $\hat{A}_j \in C^1([0, T_0], L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d))$ für ein $T_0 > 0, s_A > 2\lceil \frac{d}{2} \rceil + d + 2$ und alle $j = 1, \dots, N$. Dann gibt es ein $c > 0$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, so dass, falls $u(x, 0) = u^{app}(x, 0)$ mit u^{app} gegeben durch (6.1), so erfüllt die Lösung u von (6.2), dass $u(x, t) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ und*

$$\|u(\cdot, t) - u^{app}(\cdot, t)\|_{C_b^0} \leq c\varepsilon^{3/2} \text{ für alle } \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0].$$

Bemerkung 6.3. Für $j = 1, \dots, N$ bezeichnet \hat{A}_j die Fouriertransformierte der Einhüllenden A_j , wobei die Fouriertransformation in d Dimensionen definiert ist wie in 2.7.

Der Beweis von Satz (6.2) ist wie folgt strukturiert. Wir transformieren das Problem von \mathbb{R}^d auf den d -dimensionalen Torus mit der Wellenzahl k aus der sogenannten Brillouinzone \mathbb{B} , indem wir Ansatz (6.1) in Blochvariablen schreiben. Dann setzen wir diesen Ansatz in die blochtransformierte Gleichung ein.

Im nächsten Schritt entwickeln wir den transformierten Ansatz in Eigenfunktionen aus dem Blocheigenwertproblem, siehe Abschnitt 2.2. Dies überführt das Problem in ein System unendlich vieler gewöhnlicher Differentialgleichungen. Da mit dem gegebenen Ansatz jedoch zu viele Terme des Residuums stehen bleiben, erweitern wir Ansatz (6.1) um entsprechende Terme, welche zu einem kleinen Residuum führen. Dieses Vorgehen ist bereits aus [BSTU06] bekannt.

Danach wird das Residuum abgeschätzt, wobei wir benutzen, dass die Einhüllenden A_j für $j = 1, \dots, N$ Lösungen der Coupled Mode Gleichungen (3.10) sind. Zwischen $L^2(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))$ und $L^2(\mathbb{B}, l^2_{s/d})$ gibt es einen Isomorphismus, welcher zum Beispiel in [BSTU06] genutzt wird. In höheren Dimensionen verlieren wir in $L^2(\mathbb{B}, l^2_{s/d})$ jedoch zu viele ε -Potenzen [SU01], da $\|f(\varepsilon \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \varepsilon^{-n/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Deshalb führen wir die Abschätzungen in dem Raum $\mathcal{X}(s) := L^1(\mathbb{B}, l^2_{s/d})$ durch. Zwischen diesem Raum und dem Raum der physikalischen Variablen haben wir zwar keine Isomorphieeigenschaft, jedoch können wir die Supremumsnorm in x durch die $L^1(\mathbb{B}, l^2_{s/d})$ -Norm kontrollieren, siehe Lemma 2.15.

Die Tatsache, dass wir in Blochvariablen arbeiten und den Raum L^1_r für die Abschätzungen nutzen, ist einer der Hauptunterschiede zu der Methodik in [GMS08]. Dort wird, wie in der Einleitung erwähnt, der Fehler durch $C\varepsilon$ in der H^s_ε -Norm abgeschätzt, was eine Abschätzung von $C\varepsilon^{1-d/2}$ in der $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ -Norm liefert. Für eine Fehlerordnung von $C\varepsilon^{3/2}$, welche wir unten beweisen werden, wäre in dem Setting von [GMS08] ein Closed Mode System höherer Ordnung notwendig, welches eine striktere Annahme ist als diejenigen, welche wir

für Satz 6.2 treffen. Außerdem müssen wir durch unsere Annäherung keine Korrekturterme höherer Ordnung betrachten.

Für die Abschätzung des Residuums benötigen wir eine gewisse Regularität der Blochfunktionen, wodurch sich die Regularitätsannahme an das Potential V in (6.2) ergibt. Den asymptotischen Fehler berechnen wir dann mit dem Gronwall Lemma, siehe Lemma A.4. Nachdem wir gezeigt haben, dass das Residuum zum erweiterten Ansatz mit einem Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ ausreichend klein wird, zeigen wir schließlich, dass auch der Fehler zwischen dem ursprünglichen Ansatz und dem erweiterten Ansatz klein genug ist.

Beweis. Im ersten Schritt wenden wir die Blochtransformation auf Ansatz (6.1) an. Wir erhalten

$$\tilde{u}^{\text{app}}(x, k, t) = \varepsilon^{1/2-d} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, \varepsilon t \right) p_j(x) e^{-i\omega_0 t} e^{i\eta \cdot x}$$

mit $p_j(x) = p_{n_0}(x, k^{(j)})$ für $j = 1, \dots, N$ und 1-Quasiperiodizität in jeder Komponente von k .

Wenden wir die Blochtransformation auf Gleichung (6.2) an, so erhalten wir

$$(i\partial_t - \mathcal{L}(k)) \tilde{u}(x, k, t) - \varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} a_m \tilde{u}(x, k - q_m, t) - \sigma(x) (\tilde{u} *_B \tilde{u} *_B \tilde{u})(x, k, t) = 0 \quad (6.3)$$

mit $\mathcal{L}(k) = -|\nabla + ik|^2 + V(x)$, denn für $g(x) := f(x)e^{il \cdot x}$ ist $(\mathcal{T}g)(x, k) = (\mathcal{T}f)(x, k - l)$.

Die Blochtransformation des Residuums vom approximativen Ansatz u^{app} in (6.2) ist für alle $k \in \mathbb{R}^d$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\text{PNLS}(u^{\text{app}}))(x, k, t) &= \varepsilon^{3/2-d} e^{-i\omega_0 t} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} e^{i\eta \cdot x} \sum_{j=1}^N \left[i\partial_T \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) p_j(x) \right. \\ &+ 2i \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon} \cdot \nabla p_j(x) - \sum_{m=-m_0}^{m_0} a_m \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} - q_m + \eta}{\varepsilon}, T \right) p_j(x) \\ &\left. - \varepsilon \left| \frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon} \right|^2 \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) p_j(x) \right] \\ &- \varepsilon^{3/2-d} e^{-i\omega_0 t} \sigma(x) \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \in \{1, \dots, N\}}} \sum_{\eta_\alpha, \eta_\beta, \eta_\gamma \in \mathbb{Z}^d} \int_{\mathbb{B}} \int_{\mathbb{B}} \hat{A}_\alpha \left(\frac{k - h - k^{(\alpha)} + \eta_\alpha}{\varepsilon}, T \right) \\ &\hat{A}_\beta \left(\frac{h - l + k^{(\beta)} - \eta_\beta}{\varepsilon}, T \right) \hat{A}_\gamma \left(\frac{l - k^{(\gamma)} + \eta_\gamma}{\varepsilon}, T \right) p_\alpha e^{i\eta_\alpha \cdot x} \bar{p}_\beta e^{-i\eta_\beta \cdot x} p_\gamma e^{i\eta_\gamma \cdot x} dl dh, \end{aligned}$$

wobei die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2-d})$ wegfallen, da die p_j für $j = 1, \dots, d$ Eigenfunktionen von $\mathcal{L}(k)$ zum gleichen Eigenwert ω_0 sind. Den letzten Term des Residuums, welcher

aus der Nichtlinearität stammt, bezeichnen wir mit I und führen eine Variablentransformation durch. Wir definieren

$$\frac{l - k^{(\gamma)} + \eta_\gamma}{\varepsilon} =: \tilde{l}, \quad \frac{h - l + k^{(\beta)} - \eta_\beta}{\varepsilon} =: \tilde{h} - \tilde{l}.$$

Daraus folgt, dass

$$\tilde{h} = \frac{h + k^{(\beta)} - k^{(\gamma)} - \eta_\beta + \eta_\gamma}{\varepsilon}$$

und somit gilt

$$\frac{k - h - k^{(\alpha)} + \eta_\alpha}{\varepsilon} = \frac{k - k^{(\alpha)} + k^{(\beta)} - k^{(\gamma)} + \eta_\alpha - \eta_\beta + \eta_\gamma}{\varepsilon} - \tilde{h}.$$

Wir erhalten

$$I = -\varepsilon^{3/2-d} e^{-i\omega_0 t} \sigma(x) \sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \in \{1, \dots, N\}}} \sum_{\substack{\eta_\alpha, \eta_\beta, \eta_\gamma \\ \in \mathbb{Z}^d}} p_\alpha \bar{p}_\beta p_\gamma e^{i(\eta_\alpha - \eta_\beta + \eta_\gamma) \cdot x} \int_{\frac{\mathbb{B} + k^{(\beta)} - k^{(\gamma)} - \eta_\beta + \eta_\gamma}{\varepsilon}} \int_{\frac{\mathbb{B} - k^{(\gamma)} + \eta_\gamma}{\varepsilon}} \hat{A}_\alpha \left(\frac{k - k^{(\alpha)} + k^{(\beta)} - k^{(\gamma)} + \eta_\alpha - \eta_\beta + \eta_\gamma}{\varepsilon} - \tilde{h}, T \right) \hat{A}_\beta \left(\tilde{h} - \tilde{l}, T \right) \hat{A}_\gamma \left(\tilde{l}, T \right) d\tilde{l} d\tilde{h}. \quad (6.4)$$

Das Residuum besteht für Ansatz (6.1) aus einer Reihe an Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2-d})$, die sich durch die Formulierung der Coupled Mode Gleichungen nicht auslöschen, so dass wir den ursprünglichen Ansatz entsprechend anpassen müssen.

An dieser Stelle möchten wir anmerken, dass I in der Nähe von $k = k^{(j)}$, genauer für $k \in B^\rho(k^{(j)})$ durch den Faltungsterm

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, N\}^3 \\ k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)} = k^{(j)}}} \left(\hat{A}_\alpha * \hat{A}_\beta * \hat{A}_\gamma \right) \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) e^{i(k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)}) \cdot x} p_\alpha(x) \bar{p}_\beta(x) p_\gamma(x)$$

approximiert werden kann, da wir wie oben beschrieben für $\hat{A}_j(K, T)$, $j = 1, \dots, N$ konzentriert in der Nähe von $K = 0$ die $\hat{A}_j(K, T)$ durch $\chi_{B^{\rho-1}(0)}(K) \hat{A}_j(K, T)$ approximieren können.

6.1 Konstruktion des erweiterten Ansatzes

Um ein möglichst kleines Residuum zu erhalten, wollen wir Ansatz (6.1) zum sogenannten erweiterten Ansatz modifizieren. Der approximative Ansatz lautet in den \vec{U} -Variablen, siehe Kapitel 2.2,

$$\vec{U}_n^{\text{app}}(k, t) = \left\langle \varepsilon^{1/2-d} e^{-i\omega_0 t} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, \varepsilon t \right) p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}), p_n(\cdot, k) \right\rangle_{L^2(\mathbb{T})}$$

$$\approx \varepsilon^{1/2-d} e^{-i\omega_0 t} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, \varepsilon t \right) \delta_{n, n_0},$$

denn mit der Quasiperiodizität der Blochfunktionen in k ist $p_{n_0}(\cdot, k) e^{i\eta \cdot x} = p_{n_0}(\cdot, k - \eta)$. Im letzten Schritt haben wir $\langle p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}), p_n(\cdot, k) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}$ durch $\langle p_{n_0}(\cdot, k), p_n(\cdot, k) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \delta_{n, n_0}$ ersetzt. Den Fehler, der hierbei gemacht wird, schätzen wir in der rigorosen Rechtfertigung ab.

Für den erweiterten Ansatz verkleinern wir als erstes den Träger der Einhüllenden im Fourierraum $\hat{A}_j \left(\frac{\cdot - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, \varepsilon t \right)$ auf eine kleine Umgebung der Null der $k^{(j)}$ für $j = 1, \dots, N$, auf der die \hat{A}_j konzentriert sind. Wir setzen also $\hat{A} \left(\frac{\cdot - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, \varepsilon t \right)$ außerhalb von $B_{\varepsilon^\rho}(k^{(j)} - \eta)$ für ein $\rho \in (0, 1)$ zu Null, welches später explizit bestimmt wird. Das heißt

$$\tilde{A}_j(\cdot, T) = \chi_{B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \hat{A}_j(\cdot, T) \text{ für } j = 1, \dots, N.$$

Die Konzentration der Einhüllenden im Fourierraum und den Schnitt auf den Ball $B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)$ verdeutlichen wir anhand der folgenden eindimensionalen Skizze in Abbildung 6.1.

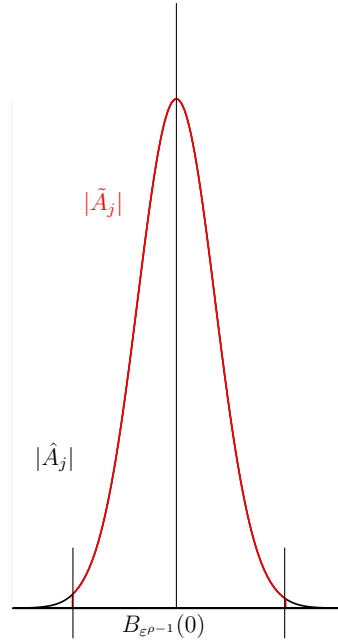


Abbildung 6.1: Struktur einer Einhüllenden \hat{A}_j für 1D im Fourierraum und für festes t mit dem Schnitt auf $B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)$.

Als nächstes ergänzen wir den approximativen Ansatz um Korrekturterme der Ordnung $\varepsilon^{3/2-d}$, so dass im Residuum die Terme führender Ordnung in ε wegfallen, die für den approximativen Ansatz stehen bleiben.

Nach der Blochtransformation ist das Residuum in k nicht nur in den Punkten $k^{(1)}$ bis $k^{(N)}$ konzentriert. Zum einen werden durch die doppelte Faltung in (6.4) neue Konzentrationspunkte generiert, genauer gesagt, die Punkte, für die gilt, dass $k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)} \notin$

$\{k^{(1)}, \dots, k^{(N)}\} + \mathbb{Z}^d$, $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, N\}$. Auch durch die Multiplikation von \tilde{u}^{app} mit dem Potential W entstehen neue Konzentrationspunkte im Residuum, nämlich wenn $q_m + k^{(j)} \notin \{k^{(1)}, \dots, k^{(N)}\} + \mathbb{Z}^d$, $m \in \{-m_0, \dots, m_0\}$. Die Menge dieser Punkte definieren wir als

$$J := J_0 \cup J_N \cup J_W$$

mit

$$\begin{aligned} J_0 &:= \{k^{(1)}, \dots, k^{(N)}\}, \\ J_N &:= \left[\left(\left\{ k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)} \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \{1, \dots, N\}^3 \right\} + \mathbb{Z}^d \right) \cap \mathbb{B} \right] \setminus J_0, \\ J_W &:= \left[\left(\left\{ k^{(j)} + q_m \mid j \in \{1, \dots, N\}, m \in \{-m_0, \dots, m_0\} \right\} + \mathbb{Z}^d \right) \cap \mathbb{B} \right] \setminus J_0. \end{aligned}$$

Offensichtlich ist J eine endliche Menge. Wie oben beschrieben werden durch das Potential W und die Nichtlinearität nicht nur Terme in der Nähe von $k^{(j)} \in J_0$ erzeugt, sondern auch in der Nähe von $l^{(r)} \in J_W \cup J_N$. Deshalb wollen wir den approximativen Ansatz (6.1) so erweitern, dass er zusätzlich die Terme enthält, die ihren Träger in der Nähe von $l^{(r)} \in J_0 \cup J_W \cup J_N$ haben. Der erweiterte Ansatz lautet für $k \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} U_{n_0}^{\text{ext}}(k, t) &= \varepsilon^{1/2-d} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j=1}^N \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) + \varepsilon \sum_{l^{(r)} \in J \setminus J_0} \tilde{A}_{n_0, r}^{\text{ext}} \left(\frac{k - l^{(r)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right) e^{-i\omega_0 t}, \\ U_n^{\text{ext}}(k, t) &= \varepsilon^{3/2-d} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{l^{(r)} \in J} \tilde{A}_{n, r}^{\text{ext}} \left(\frac{k - l^{(r)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) e^{-i\omega_0 t}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Die Summen über η stellen sicher, dass die $U_n^{\text{ext}}(k, t)$, $n \in \mathbb{N}$ \mathbb{Z}^d -periodisch in k auf \mathbb{R}^d sind, das heißt

$$U_n^{\text{ext}}(k + e_j, t) = U_n^{\text{ext}}(k, t)$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $j = 1, \dots, N$. Mit der Quasiperiodizität der Blochfunktionen

$$p_n(x, k + e_j) = p_n(x, k) e^{-ix_j}, \quad j = 1, \dots, N$$

erhalten wir mit (2.5) die 1-Quasiperiodizität von \tilde{u}^{ext} in k . Wir werden später sehen, wie die Terme $\tilde{A}_{n, j}$ und $\tilde{A}_{n, r}^{\text{ext}}$ in (6.5) für $n \in \mathbb{N}$ definiert werden müssen, um für den erweiterten Ansatz ein kleines Residuum zu erreichen.

Wir wählen die Träger bezüglich k kompakt mit dem Radius ε^ρ für Terme, die in der Nähe von $k^{(j)} \in J_0$ konzentriert sind und $3\varepsilon^\rho$ für Terme, die in der Nähe von $l^{(r)} \in J_W \cup J_N$ konzentriert sind. Den zweiten Radius benötigen wir wegen der kubischen Nichtlinearität und verwenden ihn der Einfachheit halber auch für Terme, die durch W generiert werden.

$$\begin{aligned} \text{supp} \left(\tilde{A}_j(\cdot, T) \right) &\subset B_{\varepsilon^{\rho-1}}, \quad j = 1, \dots, N, \\ \text{supp} \left(\tilde{A}_{n, r}^{\text{ext}}(\cdot, T) \right) &\subset B_{3\varepsilon^{\rho-1}}, \quad l^{(r)} \in J \setminus J_0, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Mit dieser Annahme an die Träger von \tilde{A}_j und $\tilde{A}_{n, r}^{\text{ext}}$ hat der erweiterte Ansatz seinen Träger in der kompakten Umgebung der Punkte in J und deren \mathbb{Z}^d -Verschiebungen.

In den transformierten Termen des erweiterten Ansatzes erhalten wir wegen der Definition der Blochtransformation durch die η -Verschiebungen unendlich viele Summanden. Tatsächlich ist es aber so, dass es für $k \in \mathbb{B}$, das heißt für die Beschränkung auf die Periodizitätszelle, aufgrund der kompakten Träger der Einhüllenden mit Konzentration um die Punkte $k^{(j)} \in \{1, \dots, N\}$ und $l^{(r)} \in J$ nur endlich viele Möglichkeiten für η gibt, für die \vec{U}^{ext} nicht Null ist. Deshalb definieren wir für beliebiges $l \in \mathbb{B}$ die Menge

$$Z_l := \left\{ \eta \in \mathbb{Z}^d \mid l - \eta \in \overline{\mathbb{B}} \right\}.$$

Die folgenden Abbildungen veranschaulichen am Beispiel von $d = 2$ und einem Punkt $k^{(j)}$ die Wahl der Mengen $Z_{k^{(j)}}$ für $j = 1, \dots, N$ und $Z_{l^{(r)}}$ für $l^{(r)} \in J$. Zunächst wird der Fall betrachtet, in dem der Punkt $k^{(j)}$ im Inneren der Brillouinzone \mathbb{B} liegt. Hier kann ε so klein gewählt werden, dass der Ball $B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)})$ vollständig in \mathbb{B} liegt. In diesem Fall besteht die Menge $Z_{k^{(j)}}$ nur aus dem Nullvektor, da $\tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) = 0$ für $\eta \neq (0, 0)^T$ und $k \in \mathbb{B}$, siehe Abbildung 6.2.

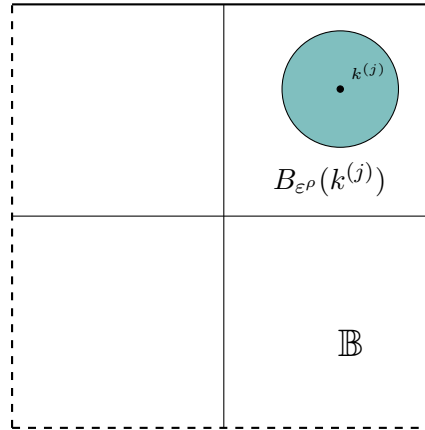


Abbildung 6.2: Beispielhafte Brillouinzone in 2D $\mathbb{B} = (-1/2, 1/2]^2$ und Ball um Punkt $k^{(j)} \in \text{int}(\mathbb{B})$ in 2D. Es ist möglich, $\varepsilon > 0$ so klein zu wählen, dass $B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)}) \subset \text{int}(\mathbb{B})$.

Interessanter ist der Fall, wenn $k^{(j)}$ auf dem Rand der Brillouinzone \mathbb{B} liegt. In Abbildung 6.3 sehen wir, dass $k^{(j)}$ einmal auf dem rechten Rand der Brillouinzone liegt (a), einmal auf dem oberen Rand (b) und einmal in der rechten oberen Ecke (c). Ein Teil des Balls $B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)})$ liegt - wie man sieht - jeweils in einer verschobenen Brillouinzone, nämlich $\mathbb{B} + (1, 0)^T$ für (a), $\mathbb{B} + (0, 1)^T$ für (b) und in den verschobenen Brillouinzone $\mathbb{B} + (0, 1)^T, \mathbb{B} + (1, 0)^T$ und $\mathbb{B} + (1, 1)^T$ für den Fall (c). Deshalb muss unsere Menge $Z_{k^{(j)}}$ die entsprechenden Verschiebungen durch η enthalten.

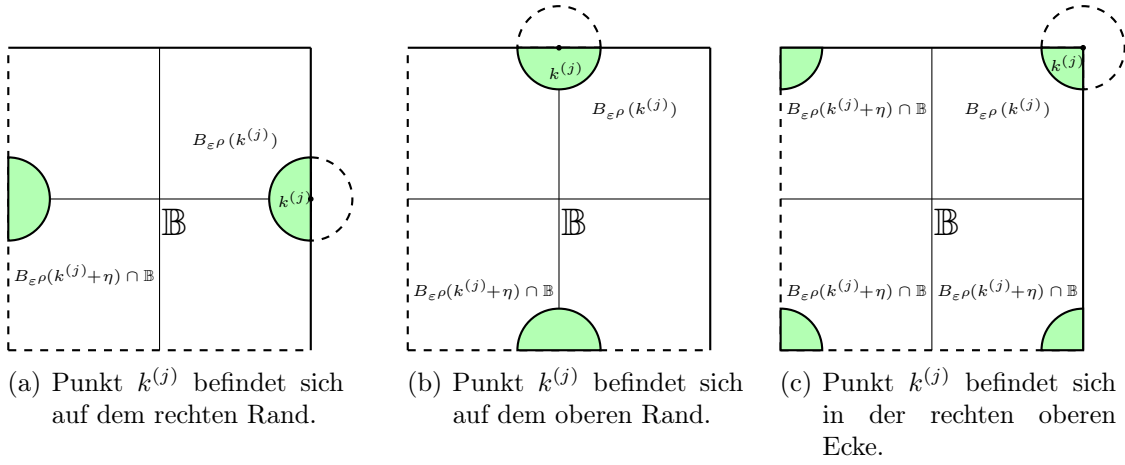


Abbildung 6.3: Brillouinzone in 2D mit unterschiedlichen Positionen von $k^{(j)}$ und der Umgebung $B_{\epsilon\rho}(k^{(j)})$ in zwei Raumdimensionen. Falls $k^{(j)} \in \partial\mathbb{B}$, so teilt sich $B_{\epsilon\rho}(k^{(j)})$ wegen Periodizität in Scheibensegmente auf, welche aufgrund der k -Periodizität wieder in \mathbb{B} liegen.

Das oben beschriebene Prinzip für die Verschiebungen lässt sich auf den d -dimensionalen Fall ausweiten. Das Gleiche gilt für die Punkte $l^{(r)}$, welche im erweiterten Ansatz durch das Potential W und den nichtlinearen Term generiert werden. In d Dimensionen wird dieses Konzept fortgesetzt, so dass wir im Folgenden über die endlichen Mengen $Z_{k^{(j)}}$ und $Z_{l^{(r)}}$ summieren, anstatt über den gesamten \mathbb{Z}^d . Der erweiterte Ansatz vereinfacht sich damit zu

$$\begin{aligned}
 U_{n_0}^{\text{ext}}(k, t) &= \left(\varepsilon^{1/2-d} \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}}} \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon^{3/2-d} \sum_{\eta \in Z_{l^{(r)}}} \sum_{l^{(r)} \in J \setminus J_0} \tilde{A}_{n_0, r}^{\text{ext}} \left(\frac{k - l^{(r)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right) e^{-i\omega_0 t}, \\
 U_n^{\text{ext}}(k, t) &= \varepsilon^{3/2-d} \sum_{\eta \in Z_{l^{(r)}}} \sum_{l^{(r)} \in J} \tilde{A}_{n, r}^{\text{ext}} \left(\frac{k - l^{(r)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) e^{-i\omega_0 t}, n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}.
 \end{aligned}$$

6.2 Abschätzung des Residuums

Nun wenden wir den Entwicklungsoperator \mathcal{D} auf (6.3) an und erhalten ein System aus unendlich vielen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(i\partial_t - \Omega(k)) \vec{U}(k, t) - \varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} M^{(m)}(k) \vec{U}(k - q_m, t) + \vec{F}(\vec{U}, \vec{U}, \vec{U})(k, t) = 0 \quad (6.6)$$

mit $k \in \mathbb{B}, t > 0$ und

$\Omega_{jj}(k) = \omega_j(k), \Omega_{lj} = 0$ für $l \neq j$, $\omega_j(k)$ Eigenwerte zu $\mathcal{L}(k)p(x, k) = \omega(k)p(x, k), x \in \mathbb{T}$,

$M_{lj}^{(m)}(k) = a_m \langle p_j(\cdot, k - q_m), p_l(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}$ und

$F_j(\vec{U}, \vec{U}, \vec{U}) := -\langle \sigma(\cdot)(\tilde{u} * \tilde{u} * \tilde{u})(\cdot, k, t), p_j(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}$

für alle $l, j \in \mathbb{N}$, wobei

$$\tilde{u}(x, k, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n(k, t) p_n(x, k) \text{ und } \tilde{u}(x, k, t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \bar{U}_n(-k, t) \overline{p_n(x, -k)}.$$

Bemerkung 6.4. Das Potential $W(x)$ kommutiert nicht mit der Blochtransformation, da W nicht \mathbb{T} -periodisch ist. Deshalb errechnen wir die Einträge der Matrix $M^{(m)}$ wie folgt. Wenden wir die Blochtransformation auf $W(x)u(x)$ an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(Wu)(x, k) &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \widehat{Wu}(k + \eta) e^{i\eta \cdot x} = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{m=-m_0}^{m_0} a_m e^{iq_m \cdot x} u(x) e^{-i(k+\eta) \cdot x} dx e^{i\eta \cdot x} \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{m=-m_0}^{m_0} a_m \hat{u}(k + \eta - q_m) e^{i\eta \cdot x} = \sum_{m=-m_0}^{m_0} a_m \tilde{u}(x, k - q_m) \\ &= \sum_{m=-m_0}^{m_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} a_m U_n(k - q_m) p_n(x, k - q_m). \end{aligned}$$

Das heißt, $\langle \mathcal{T}(Wu)(\cdot, k), p_l(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}} = \sum_{m=-m_0}^{m_0} \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle p_n(\cdot, k - q_m), p_l(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}} a_m U_n(k - q_m)$.

Das Residuum für den erweiterten Ansatz erhalten wir, indem wir \vec{U}^{ext} in Gleichung (6.6) einsetzen, das heißt

$$\overrightarrow{\text{Res}}(k, t) := (i\partial_t - \Omega(k)) \vec{U}^{\text{ext}}(k, t) - \varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} M^{(m)} \vec{U}^{\text{ext}}(k - q_m, t) + F(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}})(k, t),$$

wobei die Struktur von $F(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}})$ unten in (6.2) für den Term führender Ordnung betrachtet wird.

Das Residuum hat in dem unendlichdimensionalen Raum $\mathcal{X}(s)$ die Form

$$\overrightarrow{\text{Res}} = (\text{Res}_1, \dots, \text{Res}_{n_0}, \dots)^T.$$

Für die spätere Abschätzung des Residuums ist es hilfreich, den erweiterten Ansatz nach Termen der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2-d})$ und den restlichen Termen aufzuteilen. Wir schreiben also

$$\vec{U}^{\text{ext}} = \vec{U}^{\text{ext},0} + \vec{U}^{\text{ext},1},$$

wobei

$$\vec{U}^{\text{ext},0} := \varepsilon^{1/2-d} \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}}} \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) e_{n_0} e^{-i\omega_0 t}$$

mit dem n_0 -ten euklidischen Einheitsvektor e_{n_0} in \mathbb{R}^N und $\vec{U}^{\text{ext},1} := \vec{U}^{\text{ext}} - \vec{U}^{\text{ext},0}$. Es hat $\vec{U}^{\text{ext},0}$ seinen Träger auf $\bigcup_{j=1}^N B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)})$ und $\vec{U}^{\text{ext},1}$ auf $\bigcup_{l^{(r)} \in J} B_{\varepsilon\rho}(l^{(r)})$.

Wie oben beschrieben konzentriert sich das Residuum auf die Umgebung der Punkte $k^{(j)} + \eta$ mit $j = 1, \dots, N$, $\eta \in Z_{k^{(j)}}$ und $l^{(r)} + \eta$ mit $l^{(r)} \in J$, $\eta \in Z_{l^{(r)}}$.

Wir betrachten das Residuum getrennt für n_0 und $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$.

Für $k \in \mathbb{B}$ und $n = n_0$ ist

$$\begin{aligned} \text{Res}_{n_0}(k, t) = & \varepsilon^{3/2-d} \left[i\partial_T \sum_{j=1}^N \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}}} \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right. \\ & + \varepsilon^{-1}(\omega_0 - \omega_{n_0}(k)) \sum_{j=1}^N \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}}} \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \\ & + (\omega_0 - \omega_{n_0}(k)) \sum_{l^{(r)} \in J \setminus J_0} \sum_{\eta \in Z_{l^{(r)}}} \tilde{A}_{n_0,r}^{\text{ext}} \left(\frac{k - l^{(r)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \\ & \left. - \sum_{m=-m_0}^{m_0} M_{n_0,n_0}^{(m)}(k) \sum_{j=1}^N \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}+q_m}} \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} - q_m + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right] e^{-i\omega_0 t} \\ & + F_{n_0}(\vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}) + h.o.t. \end{aligned}$$

und für $n \neq n_0$ lauten die Einträge des Residuums

$$\begin{aligned} \text{Res}_n(k, t) = & \varepsilon^{3/2-d} \left[(\omega_0 - \omega_n(k)) \sum_{l^{(r)} \in J} \sum_{\eta \in Z_{l^{(r)}}} \tilde{A}_{n,r}^{\text{ext}} \left(\frac{k - l^{(r)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right. \\ & \left. - \sum_{m=-m_0}^{m_0} M_{n,n_0}^{(m)}(k) \sum_{j=1}^N \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}+q_m}} \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} - q_m + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right] e^{-i\omega_0 t} \\ & + F_n(\vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}) + h.o.t. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $h.o.t.$ die Terme höherer Ordnung in ε , welche die Zeitableitung von $\vec{U}^{\text{ext},1}$, die Anwendung von dem Potential W auf $\vec{U}^{\text{ext},1}$ und die Nichtlinearität mit einem Auftreten von $\vec{U}^{\text{ext},1}$ im Argument enthalten.

Die Nichtlinearität stellt aufgrund der doppelten Faltung im Blochraum den kompliziertesten Teil des Residuums dar. Wir werden nun die Struktur von $F_n(\vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0})$, dem Term führender Ordnung untersuchen, da dieser die Nichtlinearität der Coupled Mode Gleichungen generiert.

Wir haben

$$F_n(\vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0})(k, t) = -\langle \sigma(\cdot)(\tilde{u}^{\text{ext},0}, \tilde{u}^{\text{ext},0}, \tilde{u}^{\text{ext},0})(\cdot, k, t) p_n(\cdot, k) \rangle_\pi, n \in \mathbb{N},$$

wobei

$$\begin{aligned}\tilde{u}^{\text{ext},0}(x, k, t) &:= \sum_{n \in \mathbb{N}} U_n^{\text{ext},0}(k, t) p_n(x, k) \\ &= \varepsilon^{1/2-d} \sum_{j=1}^N \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) p_{n_0}(x, k) e^{-i\omega_0 t}.\end{aligned}$$

Die Blochtransformation einer Funktion $u(x)$ erfüllt, dass $\tilde{u}(x, k) = \tilde{u}(x, -k)$. Wir fordern, dass $\tilde{u}^{\text{ext},0}$ diese Symmetrie ebenfalls erfüllt und erhalten

$$\tilde{u}^{\text{ext},0}(x, k, t) = \varepsilon^{1/2-d} \sum_{j=1}^N \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \tilde{A}_j \left(\frac{k + k^{(j)} - \eta}{\varepsilon}, T \right) \overline{p_{n_0}(x, -k)} e^{i\omega_0 t}.$$

Weiter definieren wir $b^{(n)}$ als

$$b^{(n)}(\lambda, \mu, \nu, k) := \langle -\sigma(\cdot) p_{n_0}(\cdot, \lambda) \bar{p}_{n_0}(\cdot, \mu) p_{n_0}(\cdot, \nu), p_n(\cdot, k) \rangle_{L^2(\mathbb{T})}.$$

Die nichtlinearen Terme des Residuums lauten

$$\begin{aligned}F_{n_0} \left(\vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0} \right) (k, t) &= \varepsilon^{3/2-d} \sum_{k^{(j)} \in J_0 \cup J_N} \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda_{k^{(j)}}} f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n_0)} e^{-i\omega_0 t} \\ F_n \left(\vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0} \right) (k, t) &= \varepsilon^{3/2-d} \sum_{l^{(r)} \in J_0 \cup J_N} \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda_{l^{(r)}}} f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)} e^{-i\omega_0 t}\end{aligned}$$

mit der Menge, der Indizes (α, β, γ) , für die der Faltungsterm konzentriert in $l^{(r)}$ ist

$$\Lambda_{l^{(r)}} := \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \{1, \dots, N\}^3 \mid k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)} = l^{(r)} \right\}$$

und

$$\begin{aligned}f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)}(k, t) &= \int_{B_{2\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \int_{B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)} b_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)} \left(k - (k^{(\gamma)} - k^{(\beta)}) - \varepsilon \tilde{h}, k^{(\beta)} - \varepsilon(\tilde{h} - \tilde{l}), k^{(\gamma)} + \varepsilon \tilde{l}, k \right) \\ &\quad \sum_{\eta \in Z_{k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)}}} \tilde{A}_\alpha \left(\frac{k - (k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)}) + \eta}{\varepsilon} - \tilde{h}, T \right) \tilde{A}_\beta(\tilde{h} - \tilde{l}, T) \tilde{A}_\gamma(\tilde{l}, T) \, d\tilde{l} \, d\tilde{h}\end{aligned}$$

für $k \in B_{3\varepsilon^\rho}(k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)})$.

Aufgrund der Träger der nichtlinearen Terme und der Definition der \tilde{A}_j als abgeschnittene \hat{A}_j -Funktionen, können für $k \in B_{\varepsilon^\rho}(k^{(j)} - \eta) \cap \mathbb{B}$, $\eta \in Z_{k^{(j)}}$ die Summen über η_α, η_β und η_γ reduziert werden zur Summe über $\eta \in Z_{k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)}}$, für die

$$\eta_\alpha - \eta_\beta + \eta_\gamma = \eta$$

gilt. Der Rest von F kann später mit den Termen höherer Ordnung einfach abgeschätzt werden.

Nachdem wir gesehen haben, welche Form das Residuum hat, können wir die einzelnen Terme im erweiterten Ansatz so bestimmen, dass wir ein kleines Residuum erhalten. Da die Terme führender Ordnung in Res_{n_0} durch die Fouriertransformation der linken Seite von (3.10) approximiert werden können, definieren wir die \tilde{A}_j für $j = 1, \dots, N$ als Abschneidefunktionen der Einhüllenden im Fourierraum \hat{A}_j , das heißt

$$\tilde{A}_j(K, T) := \chi_{B_{\varepsilon\rho^{-1}}(0)} \hat{A}_j(K, T), \quad (6.7)$$

wobei die $\hat{A}_j(K, T)$ gerade die Lösungen der Coupled Mode Gleichungen (3.10) sind. Diese Wahl der \tilde{A}_j ist sinnvoll, weil die Terme führender Ordnung in Res_{n_0} , wie wir unten zeigen, durch die Fouriertransformierte der linken Seite der j -ten Gleichung von (3.10) approximiert werden kann. Dass die entsprechenden Terme in Residuum durch die obige Definition wirklich klein werden, zeigen wir, indem wir (3.10) nutzen und den Fehler abschätzen, der durch die Verwendung der abgeschnittenen \hat{A}_j gemacht wird.

Weiter definieren wir $\tilde{A}_{n,r}^{\text{ext}}$, so dass die Terme führender Ordnung im Residuum verschwinden. Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{n,r}^{\text{ext}} \left(\frac{k - l^{(r)}}{\varepsilon}, T \right) &:= (\omega_0 - \omega_n(k))^{-1} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{\substack{m=-m_0 \\ k^{(j)} + q_m \in l^{(r)} + \mathbb{Z}^d}}^{m_0} M_{n,n_0}^{(m)}(k) \tilde{A}_j \left(\frac{k - l^{(r)}}{\varepsilon}, T \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{(\alpha,\beta,\gamma) \in \Lambda_r} f_{\alpha,\beta,\gamma}^{(n)}(k, t) \right). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Das gilt für alle $l^{(r)} \in J$, falls $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$ und für alle $l^{(r)} \in J \setminus J_0$, falls $n = n_0$.

Um das Residuum in der $\mathcal{X}(s)$ -Norm abschätzen zu können, benötigen wir einige vorbereitende Abschätzungen. Die Nichtresonanzbedingung

$$|\omega_0 - \omega_n(k)| > \delta > 0$$

folgt für alle $n \in \mathbb{N}, n \neq \{n_0\} \forall k \in B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)})$, falls ω_0 einfach in jedem $k^{(j)}$ ist.

Wir halten fest, dass für $q \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\begin{aligned} |M_{n,n_0}^{(m)}(k)| &= \frac{|a_m|}{|\omega_n(k)^q|} |\langle p_{n_0}(\cdot, k - q_m), \mathcal{L}(\cdot, k)^q p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}| \\ &= \frac{|a_m|}{|\omega_n(k)^q|} \|\langle \mathcal{L}(\cdot, k)^q p_{n_0}(\cdot, k - q_m), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}\| \\ &\leq c_M n^{-2q/d} \sup_{k \in \mathbb{B}} \|p_{n_0}(\cdot, k)\|_{H^{2q}(\mathbb{T})}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (6.9)$$

und

$$\begin{aligned} |b^{(n)}(\lambda, \mu, \nu, k)| &= |\langle \sigma(\cdot) p_{n_0}(\cdot, \lambda) \overline{p_{n_0}(\cdot, \mu)} p_{n_0}(\cdot, \nu), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}| \\ &= |\omega_n(k)^{-q}| |\langle (\sigma(\cdot) p_{n_0}(\cdot, \lambda) \overline{p_{n_0}(\cdot, \mu)} p_{n_0}(\cdot, \nu)), \mathcal{L}(\cdot, k)^q p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}| \\ &\leq |\omega_n(k)^{-q}| \|\mathcal{L}(\cdot, k)^q (\sigma(\cdot) p_{n_0}(\cdot, \lambda) \overline{p_{n_0}(\cdot, \mu)} p_{n_0}(\cdot, \nu))\|_{\mathbb{T}} \\ &\leq c_b n^{-2q/d} \sup_{k \in \mathbb{B}} \|p_{n_0}(\cdot, \lambda)\|_{H^{2q}(\mathbb{T})} \|p_{n_0}(\cdot, \mu)\|_{H^{2q}(\mathbb{T})} \|p_{n_0}(\cdot, \nu)\|_{H^{2q}(\mathbb{T})} \end{aligned} \quad (6.10)$$

für alle $\lambda, \mu, \nu \in 2\mathbb{B}$, falls $\sigma \in H^{2q}(\mathbb{T})$.

Bemerkung 6.5. Die erforderliche H^{2q} -Regularität der Blochwelle $p_{n_0}(\cdot, k)$ ist erfüllt, wenn $V \in H^a(\mathbb{T})$ mit $a > 2q + d - 2$, siehe Lemma 2.15.

Mit dem folgenden Lemma wollen wir die Summanden von \vec{U}^{ext} in der $\mathcal{X}(s)$ -Norm abschätzen.

Lemma 6.6. Sei $\hat{A}_j \in C([0, T_0], L^1(\mathbb{R}^d))$ für $j = 1, \dots, N$. Dann existiert ein $c > 0$, so dass für alle $s > d/2$ und alle $t \in [0, \varepsilon^{-1}T]$ gilt, dass

$$\left\| \vec{U}^{\text{ext},0}(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{1/2} \quad \text{und} \quad \left\| \vec{U}^{\text{ext},1}(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{3/2}.$$

Beweis. Zunächst betrachten wir die Terme des erweiterten Ansatzes mit der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2-d})$. Durch Einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} \left\| \vec{U}^{\text{ext},0}(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} &= \left\| \left(n_0^{2s/d} |U_{n_0}^{\text{ext},0}(\cdot, t)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \\ &\leq c\varepsilon^{1/2-d} \sum_{j=1}^N \left\| \tilde{A}_j \left(\frac{\cdot - k^{(j)}}{\varepsilon}, T \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq c\varepsilon^{1/2-d+d} \sum_{j=1}^N \left\| \hat{A}_j(\cdot, T) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq c\varepsilon^{1/2} \end{aligned}$$

für $\hat{A}_j \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Die restlichen Terme des erweiterten Ansatzes mit Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2-d})$ schätzen wir wie folgt ab. Wir haben

$$\begin{aligned} \left\| \vec{U}^{\text{ext},1}(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} &= \left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{2s/d} |U_n^{\text{ext},1}(\cdot, t)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \\ &= \left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{2s/d} \left| \varepsilon^{3/2-d} \sum_{l^{(r)} \in J} \tilde{A}_{n,r}^{\text{ext}} \left(\frac{k - l^{(r)}}{\varepsilon}, T \right) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1(\mathbb{B})}. \end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Definition von $\tilde{A}_{n,r}^{\text{ext}}$ aus (6.8). Damit ist

$$\begin{aligned} \left\| \vec{U}^{\text{ext},1}(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} &\leq c\varepsilon^{3/2-d} \left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{2s/d} \left| (\omega_0 - \omega_n(k))^{-1} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{\substack{m=-m_0 \\ k^{(j)} + q_m \in l^{(r)} + \mathbb{Z}^d}} M_{n,n_0}^{(m)}(k) \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \tilde{A}_j \left(\frac{k - l^{(r)}}{\varepsilon}, T \right) - \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda_r} f_{\alpha, \beta, \gamma}^{(n)} \right) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1(\mathbb{B})}. \end{aligned}$$

Wir nutzen die Taylorentwicklung von $\omega_{n_0}(k)$ um $k^{(j)}$ für $j = 1, \dots, N$. Es ist

$$\omega_{n_0}(k) = \omega_0 + \varepsilon \nabla \omega_{n_0}(k^{(j)})^T \left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon} \right)^T D^2 \omega_{n_0}(k^{(j)}) \left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

mit $\omega_0 = \omega_{n_0}(k^{(j)})$ für $j = 1, \dots, N$. Wir sehen, dass der Term $\varepsilon^{-1}(\omega_0 - \omega_{n_0}(k))$ des Residuums die Ordnung $\mathcal{O}(1)$ hat.

Mit der Asymptotik der Eigenwerte in Lemma 2.14 wissen wir, dass

$$|\omega_n| \leq cn^{2/d}.$$

Außerdem verwenden wir die Abschätzungen (6.9) und (6.10), so dass für $p_{n_0} \in H^{2q}(\mathbb{T})$. Damit ist

$$\begin{aligned} \left\| \vec{U}^{\text{ext},1}(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} &\leq c\varepsilon^{3/2-d} \left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{2s/d} \left| (\omega_0 - \omega_n(k))^{-1} \left(\sum_{j=1}^N \sum_{\substack{m=-m_0 \\ k^{(j)}+q_m \in l^{(r)}+\mathbb{Z}^d}}^{m_0} c_M n^{-2q/d} \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \tilde{A}_j \left(\frac{k - l^{(r)}}{\varepsilon}, T \right) - \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda_r} \int_{B_{2\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \int_{B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)} c_b n^{-2q/d} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \tilde{A}_\alpha \left(\frac{k - (k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)})}{\varepsilon} - \tilde{h}, T \right) \tilde{A}_\beta(\tilde{h} - \tilde{l}, T) \tilde{A}_\gamma(\tilde{l}, T) d\tilde{l} d\tilde{h} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{B})}^{1/2} \\ &\leq c\varepsilon^{3/2-d} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} n^{2s/d-4/d-4q/d} \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\left\| \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{m=-m_0 \\ k^{(j)}+q_m \in l^{(r)}+\mathbb{Z}^d}}^{m_0} c_M \sum \tilde{A}_j \left(\frac{\cdot - l^{(r)}}{\varepsilon}, T \right) \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda_{l^{(r)}}} \left\| \tilde{A}_\alpha \left(\frac{\cdot - (k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)})}{\varepsilon}, T \right) \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \right. \\ &\quad \left. \left\| \tilde{A}_\beta(\cdot, T) \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \left\| \tilde{A}_\gamma(\cdot, T) \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \right) \\ &\leq c\varepsilon^{3/2} \left(\sum_{j=1}^N \left\| \hat{A}_j(\cdot, T) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda_{l^{(r)}}} \left\| \hat{A}_\alpha(\cdot, T) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \left\| \hat{A}_\beta(\cdot, T) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \left\| \hat{A}_\gamma(\cdot, T) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \right) \end{aligned}$$

$$\leq c\varepsilon^{3/2},$$

denn $\hat{A}_j \in C([0, T_0], L^1(\mathbb{R}^d))$. Für die $l^2_{s/d}$ -Summierbarkeit in n müssen wir garantieren, dass

$$\frac{2s}{d} - \frac{4}{d} - \frac{4q}{d} < -1$$

ist. Also brauchen wir als Bedingung an q , dass

$$q \geq \frac{s}{2} + \frac{d}{4} - 1 \quad (6.11)$$

mit $s > d/2$. □

Wie beschrieben liegt unser Ziel darin, ein möglichst kleines Residuum zu erhalten. Wir haben also den erweiterten Ansatz gerade so definiert, dass sich die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2-d})$ in Res_n , $n \in \mathbb{N} \setminus n_0$ auslöschen. Dafür haben wir benutzt, dass die \hat{A}_j für $j = 1, \dots, N$ die Lösungen der fouriertransformierten Coupled Mode Gleichungen (3.10) sind. Das heißt, wir müssen zum einen den Fehler abschätzen, der entsteht, indem wir die abgeschnittenen Funktionen \tilde{A}_j in der Nichtlinearität nutzen und zum anderen die Terme höherer Ordnung. Wir formulieren das folgende Lemma.

Lemma 6.7. *Für $\hat{A}_j \in C([0, T_0], L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d))$ Lösung von (3.10) und \tilde{A}_j wie in (6.7) für $j = 1, \dots, N$ definiert, $s_A > 2$, $T_0 > 0$ für $s > d/2$ und $p_n \in H^{2q}$ mit $q = q(s)$ gilt*

$$\|\overrightarrow{\text{Res}}\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c_R \varepsilon^{5/2}.$$

Beweis. Für die Abschätzung des Residuums schreiben wir zunächst die übrig gebliebenen Terme von Res_{n_0} als Summe aus Integralen, die wir dann einzeln abschätzen. Wir schätzen dabei insbesondere den Fehler ab, den wir durch die Approximation der Residuumsterme in Res_{n_0} durch die fouriertransformierten Coupled Mode Gleichungen machen. Es ist

$$\|\text{Res}_{n_0}\|_{L^1(\mathbb{B})} \leq I_1(T) + I_2(T) + I_3(T) + h.o.t.$$

mit

$$\begin{aligned} I_1(T) &= \varepsilon^{1/2-d} \int_{\mathbb{B}} \sum_{j=1}^N \left| \left(\omega_{n_0}(k) - \omega_0 - \varepsilon \frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon} \cdot v_g^{(j)} \right) \right| \\ &\quad \left| \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon}, T \right) \right| dk, \\ I_2(T) &= \varepsilon^{3/2-d} \int_{\mathbb{B}} \sum_{\substack{m=-m_0 \\ k^{(j)} + q_m \in l^{(r)} + \mathbb{Z}^d}}^{m_0} \left| M_{n_0, n_0}^{(m)}(k) - \kappa_{j,l}(m) \right| \sum \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon}, T \right) dk, \\ I_3(T) &= \varepsilon^{3/2-d} \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \Lambda_{k^{(j)}}} I_{\alpha, \beta, \gamma}(k, T), \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha,\beta,\gamma}(k, T) := & \int_{B_{3\varepsilon\rho}(0)} \left| \int_{B_{2\varepsilon\rho-1}(0)} \int_{B_{\varepsilon\rho-1}(0)} b^{(n_0)}\left(k - (k^{(\gamma)} - k^{(\beta)}) - \varepsilon\tilde{h}, k^{(\beta)} - \varepsilon(\tilde{h} - \tilde{l}), k^{(\gamma)} + \varepsilon\tilde{l}, k\right) \right. \\
 & \sum \tilde{A}_\alpha\left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon} - \tilde{h}, T\right) \tilde{A}_\beta(\tilde{h} - \tilde{l}, T) \tilde{A}_\gamma(\tilde{l}, T) d\tilde{l} d\tilde{h} \\
 & \left. - b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, k^{(\gamma)}, k^{(j)}) \left(\hat{A}_\alpha * \hat{A}_\beta * \hat{A}_\gamma\right)\left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon}, T\right) \right| dk.
 \end{aligned}$$

Für die Abschätzung der linearen Terme in I_1 berechnen wir beispielhaft den Fehler für ein j , wobei wir dann später über j summieren. Für k in der Nähe von $k^{(j)}$ ist $K = \frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^{1/2-d} \int_{\mathbb{B}} \varepsilon \left| \left(\omega_{n_0}(k) - \omega_0 - \left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon} \cdot v_g^{(j)} \right) \right) \right| \left| \tilde{A}_j\left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon}, T\right) \right| dk \\
 & \leq c\varepsilon^{1/2-d+d} \int_{B_{\varepsilon\rho-1}(0)} \left| \left(\omega_{n_0}(\varepsilon K + k^{(j)}) - \omega_0 - \varepsilon K \cdot v_g^{(j)} \right) \right| \left| \tilde{A}_j(K, T) \right| dK \\
 & \leq c\varepsilon^{5/2} \int_{B_{\varepsilon\rho-1}(0)} |K|^2 \left| \tilde{A}_j(K, T) \right| dK \\
 & \leq c\varepsilon^{5/2} \|\hat{A}_j(\cdot, T)\|_{L_2^1(\mathbb{R}^d)} \leq c\varepsilon^{5/2} \forall T \in [0, T_0], \text{ weil } \hat{A}_j \in C\left([0, T_0), L_2^1(\mathbb{R}^d)\right).
 \end{aligned}$$

Der Term *h.o.t.* bezeichnet wiederum die „higher order terms“, also die Terme höherer Ordnung. Insgesamt erhalten wir für I_1 die Abschätzung

$$I_1(T) \leq c\varepsilon^{5/2} \forall T \in [0, T_0].$$

Für I_2 haben wir

$$\kappa_{jl}^{(m)} = a_m \int_{\mathbb{T}} e^{i(k^{(l)} + q_m - k^{(j)}) \cdot x} p_{n_0}(x, k^{(j)}) \overline{p_{n_0}(x, k^{(l)})} dx$$

und

$$M_{n_0, n_0}^{(m)} = a_m \int_{\mathbb{T}} p_{n_0}(x, k - q_m) \overline{p_{n_0}(x, k)} dx.$$

Nun möchten wir das Argument von p_{n_0} so schreiben, dass wir die k -Quasiperiodizität der Blochfunktionen (2.5) nutzen können, um in $M_{n_0, n_0}^{(m)}$ den gleichen e -Term wie in $\kappa_{jl}^{(m)}$ zu erhalten. Es ist

$$k - q_m = k^{(l)} + \varepsilon \frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon} + k^{(j)} - k^{(l)} - q_m$$

mit $K = \frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon}$ und $k \in B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)})$. Dann ist mit der Quasiperiodizität der p_{n_0}

$$p_{n_0}(x, k - q_m) = p_{n_0}(x, k^{(l)} + \varepsilon K + k^{(j)} - k^{(l)} - q_m) = p_{n_0}(x, \varepsilon K + k^{(l)}) e^{i(k^{(l)} + q_m - k^{(j)}) \cdot x}$$

$$\begin{aligned}
 \left| M_{n_0, n_0}^{(m)}(k) - \kappa_{jl}^{(m)} \right| &\leq |a_m| \int_{\mathbb{T}} \left| e^{i(k^{(l)} + q_m - k^{(j)}) \cdot x} p_{n_0}(x, k^{(l)} + \varepsilon K) \overline{p_{n_0}(x, k^{(j)} + \varepsilon K)} \right. \\
 &\quad \left. - e^{i(k^{(l)} + q_m - k^{(j)}) \cdot x} p_{n_0}(x, k^{(j)}) \overline{p_{n_0}(x, k^{(l)})} \right| dx \\
 &\leq |a_m| \int_{\mathbb{T}} |p_{n_0}(x, k^{(l)} + \varepsilon K)| |p_{n_0}(x, k^{(j)} + \varepsilon K) - p_{n_0}(x, k^{(j)})| dx \\
 &\quad + |a_m| \int_{\mathbb{T}} |p_{n_0}(x, k^{(j)} + \varepsilon K)| |p_{n_0}(x, k^{(l)} + \varepsilon K) - p_{n_0}(x, k^{(l)})| dx \\
 &\leq c\varepsilon K.
 \end{aligned}$$

Hier haben wir die L^2 -Normierung und die Lipschitzstetigkeit der Blochfunktionen (2.12) genutzt. Es folgt, dass

$$\left\| \left| M_{n_0, n_0}^{(m)}(k) - \kappa_{jl}^{(m)} \right| \tilde{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon}, T \right) \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \leq \varepsilon^{d+1} \|\hat{A}_j\|_{L^1_1(\mathbb{R}^2)}$$

und damit ist

$$I_2(T) \leq c\varepsilon^{5/2} \quad \forall T \in [0, T_0].$$

Nun betrachten wir I_3 . Hier schätzen wir den Fehler ab, der dadurch entsteht, dass wir mit den abgeschnittenen Einhüllenden falten sowie durch das Ersetzen des Arguments von b . Wir ziehen den Term

$$b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, k^{(\gamma)}, k^{(j)}) \tilde{A}_\alpha * \tilde{A}_\beta * \tilde{A}_\gamma$$

von der rechten Seite von $I_{\alpha, \beta, \gamma}$ ab und addieren ihn dann wieder. Mit der Dreiecksungleichung und $K = \frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}$ folgt, dass

$$\begin{aligned}
 |I_{\alpha, \beta, \gamma}| &\leq \varepsilon^d \int_{B_{3\varepsilon\rho-1}(0)} \int_{B_{2\varepsilon\rho-1}(0)} \int_{B_{\varepsilon\rho-1}(0)} \left| b^{(n_0)}(\varepsilon(K - \tilde{h}) + k^{(\alpha)}, \varepsilon(\tilde{l} - \tilde{h}) + k^{(\beta)}, \right. \\
 &\quad \left. \varepsilon\tilde{l} + k^{(\gamma)}, \varepsilon K + k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)}) - b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, k^{(\gamma)}, k^{(j)}) \right| \\
 &\quad \left| \tilde{A}_\alpha(K - \tilde{h}, T) \tilde{A}_\beta(\tilde{h} - \tilde{l}, T) \tilde{A}_\gamma(\tilde{l}, T) d\tilde{l} d\tilde{h} \right| dK \\
 &\quad + \varepsilon^d \left| b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, k^{(\gamma)}, k^{(j)}) \right| \\
 &\quad \left\| \tilde{A}_\alpha *_{B_{2\varepsilon\rho-1}(0)} \tilde{A}_\beta *_{B_{\varepsilon\rho-1}(0)} \tilde{A}_\gamma - \hat{A}_\alpha * \hat{A}_\beta * \hat{A}_\gamma \right\|_{L^1(B_{3\varepsilon\rho-1}(0))} \\
 &=: I_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} + I_{\alpha\beta\gamma}^{(2)}.
 \end{aligned}$$

Die Differenz für $b^{(n_0)}$ schreiben wir als Summe aus Differenzen von $b^{(n_0)}$ -Termen, in denen jeweils ein Argument mehr ersetzt wird. Mit der Dreiecksungleichung ist in $I_{\alpha\beta\gamma}^{(1)}$

$$\begin{aligned}
 \left| b^{(n_0)}(\lambda, \mu, \nu, k) - b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, k^{(\gamma)}, k^{(j)}) \right| &\leq \left| b^{(n_0)}(\lambda, \mu, \nu, k) - b^{(n_0)}(\lambda, \mu, \nu, k^{(j)}) \right| \\
 &\quad + \left| b^{(n_0)}(\lambda, \mu, \nu, k^{(j)}) - b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, \mu, \nu, k^{(j)}) \right| + \dots \\
 &\quad + \left| b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, \nu, k^{(j)}) - b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, k^{(\gamma)}, k^{(j)}) \right|.
 \end{aligned}$$

Die Terme der rechten Seite können mittels Lipschitzstetigkeit der Blochwellen in k , der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Algebraeigenschaft von H^s für $s > d/2$ abgeschätzt werden. Ein Beispiel für die Abschätzung der Terme ist gegeben durch

$$\begin{aligned} & \left| b^{(n_0)}(\lambda, \mu, \nu, k) - b^{(n_0)}(\lambda, \mu, \nu, k^{(j)}) \right| \leq \left| b^{(n_0)}(\lambda, \mu, \nu, \varepsilon K + k^{(j)}) - b^{(n_0)}(\lambda, \mu, \nu, k^{(j)}) \right| \\ & = \left| \langle p_{n_0}(\cdot, \lambda) \bar{p}_{n_0}(\cdot, \mu) p_{n_0}(\cdot, \nu), p_{n_0}(\cdot, \varepsilon K + k^{(j)}) - p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}) \rangle_{\mathbb{T}} \right| \\ & \leq \varepsilon L |K| \|p_{n_0}(\cdot, \lambda) \bar{p}_{n_0}(\cdot, \mu) p_{n_0}(\cdot, \nu)\|_{L^2(\mathbb{T})} \\ & \leq \varepsilon L |K| \|p_{n_0}(\cdot, \lambda)\|_{H^s(\mathbb{T})} \|\bar{p}_{n_0}(\cdot, \mu)\|_{H^s(\mathbb{T})} \|p_{n_0}(\cdot, \nu)\|_{H^s(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

Die restlichen Abschätzungen der Differenzterme in $b^{(n_0)}$ folgen analog, wobei die H^s Regularität von p_{n_0} mit Lemma 2.15 und der Regularitätsbedingung (R2) garantiert ist. Das heißt, für

$$\lambda = \varepsilon(K - \tilde{h}) + k^{(\alpha)}, \quad \mu = \varepsilon(\tilde{l} - \tilde{h}) + k^{(\beta)}, \quad \nu = \varepsilon\tilde{l} + k^{(\gamma)}$$

haben wir, dass

$$\begin{aligned} & \left| b^{(n_0)}(\varepsilon(K - \tilde{h}) + k^{(\alpha)}, \varepsilon(\tilde{l} - \tilde{h}) + k^{(\beta)}, \varepsilon\tilde{l} + k^{(\gamma)}, \varepsilon K + k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)}) \right. \\ & \left. - b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, k^{(\gamma)}, k^{(j)}) \right| \leq c\varepsilon \left(|K - \tilde{h}| + |\tilde{l} + \tilde{h}| + |\tilde{l}| + |K| \right). \end{aligned}$$

Damit können wir den ersten Teil von $I_{\alpha, \beta, \gamma}$ abschätzen durch

$$\begin{aligned} & \int_{B_{3\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \int_{B_{2\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \int_{B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \left| b^{(n_0)}(\varepsilon(K - \tilde{h}) + k^{(\alpha)}, \varepsilon(\tilde{l} - \tilde{h}) + k^{(\beta)}, \right. \\ & \left. \varepsilon\tilde{l} + k^{(\gamma)}, \varepsilon K + k^{(\alpha)} - k^{(\beta)} + k^{(\gamma)}) - b^{(n_0)}(k^{(\alpha)}, k^{(\beta)}, k^{(\gamma)}, k^{(j)}) \right| \\ & \left| \tilde{A}_\alpha(K - \tilde{h}, T) \tilde{A}_\beta(\tilde{h} - \tilde{l}, T) \tilde{A}_\gamma(\tilde{l}, T) \, d\tilde{l} \, d\tilde{h} \right| \, dK \\ & \leq c\varepsilon^{d+1} \|\tilde{A}_\alpha\|_{L^1_1} \|\tilde{A}_\beta\|_{L^1_1} \|\tilde{A}_\gamma\|_{L^1_1} \leq c\varepsilon^{d+1}. \end{aligned}$$

Es bleibt also für $I_{\alpha, \beta, \gamma}^{(2)}$ der Term

$$\left\| \tilde{A}_\alpha *_{B_{2\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \tilde{A}_\beta *_{B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \tilde{A}_\gamma - \hat{A}_\alpha * \hat{A}_\beta * \hat{A}_\gamma \right\|_{L^1(B_{3\varepsilon^{\rho-1}})}$$

abzuschätzen. Dafür setzen wir für $\alpha \in \{1, \dots, N\}$

$$\tilde{A}_\alpha(K) = \hat{A}_\alpha(K) - E_\alpha(K) \text{ mit } E_\alpha(K) = \left(1 - \chi_{B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)}(K)\right) \hat{A}_\alpha(K)$$

und analog für \tilde{A}_β und \tilde{A}_γ . Der Fehler $E_\alpha(K)$ erfüllt

$$\|E_\alpha\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{|K| > \varepsilon^{\rho-1}} |(1 + |K|)^{-s_A}| \left\| \hat{A}_\alpha \right\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)} \leq c\varepsilon^{s_A(1-\rho)} \left\| \hat{A}_\alpha \right\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)}.$$

Weiter ist

$$\left\| \tilde{A}_\alpha *_{B_{2\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \tilde{A}_\beta *_{B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \tilde{A}_\gamma - \hat{A}_\alpha * \hat{A}_\beta * \hat{A}_\gamma \right\|_{L^1(B_{3\varepsilon^{\rho-1}}(0))}$$

$$\begin{aligned} &\leq c \left(\left\| E_\alpha * \hat{A}_\beta * \hat{A}_\gamma \right\|_{L^1(B_{3\varepsilon^{\rho-1}}(0))} + \left\| \hat{A}_\alpha * \bar{E}_\beta * \hat{A}_\gamma \right\|_{L^1(B_{3\varepsilon^{\rho-1}}(0))} \right. \\ &\quad \left. + \left\| \hat{A}_\alpha * \hat{A}_\beta * E_\gamma \right\|_{L^1(B_{3\varepsilon^{\rho-1}}(0))} \right) + \mathcal{R}(\vec{\hat{A}}_j, \vec{E}), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{R}(\vec{\hat{A}}_j, E)$ für weitere Terme steht, die quadratisch und kubisch in E sind, was insbesondere bedeutet, dass sie in der folgenden Abschätzung durch die Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{s_A(1-\rho)})$ absorbiert werden. Es folgt mit der Young-Ungleichung für Faltungen

$$\begin{aligned} &\left\| \tilde{A}_\alpha *_{B_{2\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \tilde{A}_\beta *_{B_{\varepsilon^{\rho-1}}(0)} \tilde{A}_\gamma - \hat{A}_\alpha * \hat{A}_\beta * \hat{A}_\gamma \right\|_{L^1(B_{3\varepsilon^{\rho-1}}(0))} \\ &\leq c\varepsilon^{s_A(1-\rho)} \|\hat{A}_\alpha\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^2)} \|\hat{A}_\beta\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)} \|\hat{A}_\gamma\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Wir wählen an dieser Stelle $\rho \in (0, 1)$ fest als

$$\rho = 1/2.$$

Damit ist

$$I_3(T) \leq c\varepsilon^{3/2-d+d+1} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, N\}} \|\hat{A}_\alpha(\cdot, T)\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)} \|\hat{A}_\beta(\cdot, T)\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)} \|\hat{A}_\gamma(\cdot, T)\|_{L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)}$$

für $s_A > 2$.

Zusammen mit Lemma 6.8 gilt also, dass $\|\vec{\text{Res}}(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{5/2}$ für $t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0]$. \square

Terme höherer Ordnung

Um den Beweis von Lemma 6.7 zu vervollständigen, betrachten wir nun die restlichen Terme des Residuums, welche gerade die Terme der Ordnungen größer als $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2-d})$ sind.

Lemma 6.8. *Sei $\hat{A}_j \in C([0, T_0], L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d)) \cap C^1([0, T_0], L^1(\mathbb{R}^d))$, $j = 1, \dots, N$, $s_A > 2$. Dann gilt für $s > d/2$*

$$(i) \left\| \varepsilon \partial_T \vec{U}^{ext,1}(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{5/2}$$

$$(ii) \left\| \varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} M^{(m)}(\cdot) \vec{U}^{ext,1}(\cdot - q_m, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{5/2}$$

$$(iii) \left\| F(\vec{U}^{ext}, \vec{U}^{ext}, \vec{U}^{ext})(\cdot, t) - F(\vec{U}^{ext,0}, \vec{U}^{ext,0}, \vec{U}^{ext,0})(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{5/2}.$$

Beweis. (i) Die Abschätzung folgt dem Beweis von Lemma 6.6. Die Konstante c hängt hier im Vergleich zur Abschätzung von $\vec{U}^{ext,1}$ zusätzlich von $\left\| \partial_T \hat{A}_j \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ für $j = 1, \dots, N$ ab.

(ii) Mit Hilfe von Lemma (6.6) ist

$$\begin{aligned}
 & \left\| \varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} M^{(m)}(\cdot) \vec{U}^{\text{ext},1}(\cdot - q_m, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \\
 & \leq c\varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} |a_m| \left\| \tilde{u}^{\text{ext},1}(\cdot, \cdot - q_m, t) \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \\
 & \leq c\varepsilon \left\| \vec{U}^{\text{ext},1}(\cdot, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{5/2}.
 \end{aligned}$$

(iii) Für $s > d/2$ gilt mit Lemma 2.12

$$\begin{aligned}
 & \left\| F\left(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}\right) - F\left(\vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}, \vec{U}^{\text{ext},0}\right) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \\
 & \leq c \|\sigma\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \left(\left\| \tilde{u}^{\text{ext},0} * \tilde{u}^{\text{ext},1} * \tilde{u}^{\text{ext},0} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \right. \\
 & \quad + \left\| \tilde{u}^{\text{ext},0} * \tilde{u}^{\text{ext},0} * \tilde{u}^{\text{ext},1} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} + \left\| \tilde{u}^{\text{ext},1} * \tilde{u}^{\text{ext},1} * \tilde{u}^{\text{ext},0} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \\
 & \quad \left. + \left\| \tilde{u}^{\text{ext},1} * \tilde{u}^{\text{ext},0} * \tilde{u}^{\text{ext},1} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} + \left\| \tilde{u}^{\text{ext},1} * \tilde{u}^{\text{ext},1} * \tilde{u}^{\text{ext},1} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \right) \\
 & \leq c \left(\left\| \tilde{u}^{\text{ext},1} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \left\| \tilde{u}^{\text{ext},0} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left\| \tilde{u}^{\text{ext},1} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))}^2 \left\| \tilde{u}^{\text{ext},0} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} + \left\| \tilde{u}^{\text{ext},1} \right\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))}^3 \right) \\
 & \leq c \left(\left\| \vec{U}^{\text{ext},1} \right\|_{\mathcal{X}(s)} \left\| \vec{U}^{\text{ext},0} \right\|_{\mathcal{X}(s)}^2 + \left\| \vec{U}^{\text{ext},1} \right\|_{\mathcal{X}(s)}^2 \left\| \vec{U}^{\text{ext},0} \right\|_{\mathcal{X}(s)} + \left\| \vec{U}^{\text{ext},1} \right\|_{\mathcal{X}(s)}^3 \right) \\
 & \leq c \left(\varepsilon^{5/2} + \varepsilon^{7/2} + \varepsilon^{9/2} \right) \leq c\varepsilon^{5/2}.
 \end{aligned}$$

Hier haben wir außerdem die Abschätzungen aus Lemma (6.6) genutzt.

□

Mit der Abschätzung des Residuums haben wir nun die Voraussetzungen erreicht, um den asymptotischen Fehler für den erweiterten Ansatz abzuschätzen.

6.3 Der asymptotische Fehler

In dem folgenden Abschnitt wollen wir mittels Gronwall Lemma und Bootstrapargument eine Abschätzung für $\|\vec{U} - \vec{U}^{\text{ext}}\|_{\mathcal{X}(s)}$ erhalten. Dafür schreiben wir die exakte Lösung als Summe aus erweitertem Ansatz \vec{U}^{ext} und dem Fehler \vec{E} als

$$\vec{U} = \vec{U}^{\text{ext}} + \vec{E}.$$

Wir nutzen diese Darstellung für Gleichung (6.6) und erhalten

$$\partial_t \vec{E} = -i\Omega(k)\vec{E} + i\vec{G}(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{E}) \quad (6.12)$$

mit

$$\vec{G}(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{E}) = \vec{\text{Res}} + \vec{F}(\vec{U}, \vec{U}, \vec{U}) - \vec{F}(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}) - \varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} M^{(m)}(\cdot) \vec{E}(\cdot - q_m, t).$$

Vorbereitend führen wir einige Abschätzungen durch. Es ist

$$\begin{aligned} \left\| \vec{F}(\vec{U}, \vec{U}, \vec{U}) - \vec{F}(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}) \right\|_{\mathcal{X}(s)} &\leq c \left(\|\vec{U}^{\text{ext}}\|_{\mathcal{X}(s)}^2 \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)} + \|\vec{U}^{\text{ext}}\|_{\mathcal{X}(s)} \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)}^3 \right) \end{aligned}$$

für $s > d/2$, wobei die kubische Struktur der Nichtlinearität und Lemma 2.12 genutzt wurde. Weiter ist

$$\begin{aligned} \left\| \varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} M^{(m)}(\cdot) \vec{E}(\cdot - q_m, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} &\leq c\varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} |a_m| \|\tilde{e}(\cdot, \cdot - q_m, t)\|_{L^1(\mathbb{B}, H^s(\mathbb{T}))} \\ &\leq c\varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} c_M \|\vec{E}(\cdot - q_m, t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon \|\vec{E}(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}(s)} \end{aligned}$$

mit $\tilde{e}(\cdot, \cdot, t) = \mathcal{D}^{-1} \vec{E}(\cdot, t)$.

Außerdem wissen wir wegen $\vec{U}^{\text{ext}} = \vec{U}^{\text{ext},0} + \vec{U}^{\text{ext},1}$ mit Lemma 6.6, dass

$$\|\vec{U}^{\text{ext}}\|_{\mathcal{X}(s)} \leq \|\vec{U}^{\text{ext},0}\|_{\mathcal{X}(s)} + \|\vec{U}^{\text{ext},1}\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{1/2} \quad \forall t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0].$$

Dann gibt es Konstanten c_1, c_2 und $c_3 > 0$, so dass

$$\left\| \vec{F}(\vec{U}, \vec{U}, \vec{U}) - \vec{F}(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c_1\varepsilon \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)} + c_2\varepsilon^{1/2} \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)}^2 + c_3 \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)}^3.$$

Daraus folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \vec{G}(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{E}) \right\|_{\mathcal{X}(s)} &\leq \|\vec{\text{Res}}\|_{\mathcal{X}(s)} + \left\| \vec{F}(\vec{U}, \vec{U}, \vec{U}) - \vec{F}(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}, \vec{U}^{\text{ext}}) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \\ &\quad + \left\| \varepsilon \sum_{m=-m_0}^{m_0} M^{(m)}(k) \vec{E}(k - q_m, t) \right\|_{\mathcal{X}(s)} \\ &\leq c_R \varepsilon^{5/2} + c_1\varepsilon \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)} + c_2\varepsilon^{1/2} \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)}^2 + c_3 \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)}^3 + c\varepsilon \|\vec{E}\|_{\mathcal{X}(s)} \end{aligned} \quad (6.13)$$

auf $[0, \varepsilon^{-1}T_0]$ mit einem $\tilde{c}, c_2, c_3 > 0$, unabhängig von ε und t , und mit $\tilde{c} := c_1 + c$. Der Operator $-i\Omega(k)$ generiert eine stetige unitäre Gruppe $S(t) = e^{-i\Omega t} : \mathcal{X}(s) \rightarrow \mathcal{X}(s)$. Damit folgt aus (6.12)

$$\vec{E}(t) = \vec{E}(0) + \int_0^t S(t-\tau) \vec{G}(\vec{U}^{\text{ext}}, E)(\tau) d\tau.$$

Wir wollen den Fehler \vec{E} in der $\mathcal{X}(s)$ -Norm abschätzen. Mit der Dreiecksungleichung und (6.13) ist

$$\begin{aligned} \|\vec{E}(t)\|_{\mathcal{X}(s)} &\leq \|\vec{E}(0)\|_{\mathcal{X}(s)} + \left\| \int_0^t S(t-\tau) \vec{G}(\vec{U}^{\text{ext}}, \vec{E})(\tau) d\tau \right\|_{\mathcal{X}(s)} \\ &\leq \|\vec{E}(0)\|_{\mathcal{X}(s)} + \int_0^t \tilde{c}\varepsilon \|\vec{E}(\tau)\|_{\mathcal{X}(s)} + c_2\varepsilon^{1/2} \|\vec{E}(\tau)\|_{\mathcal{X}(s)}^2 + c_3 \|\vec{E}(\tau)\|_{\mathcal{X}(s)}^3 + c_R\varepsilon^{5/2} d\tau. \end{aligned}$$

Wegen $\vec{U}(0) = \vec{U}^{\text{app}}(0)$ ist $\vec{E}(0) = \vec{U}^{\text{app}}(0) - \vec{U}^{\text{ext}}(0)$. Daraus folgt mit dem unten stehenden Lemma 6.9, dass

$$\|\vec{E}(0)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq C_0\varepsilon^{3/2} \quad \forall s > d/2, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \text{ für ein } \varepsilon_0 > 0.$$

Sei nun ein $M_0 > C_0$ gegeben. Dann existiert ein $\tilde{T} > 0$, so dass $\|\vec{E}(t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq M_0\varepsilon^{3/2} \quad \forall t \in [0, \tilde{T}]$. Wir wählen im Folgenden $\varepsilon_0 > 0$ und $M_0 > 0$, so dass mittels Gronwall-Argument und Bootstrapping für $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ $\|\vec{E}(t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq M_0\varepsilon^{3/2} \quad \forall t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0]$ gilt.

Wenn nun $\|\vec{E}(t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq M_0\varepsilon^{3/2}$, dann ist

$$\begin{aligned} \|\vec{E}(t)\|_{\mathcal{X}(s)} &\leq C_0\varepsilon^{3/2} + \int_0^t \tilde{c}\varepsilon \|\vec{E}(\tau)\|_{\mathcal{X}(s)} d\tau + t \left(c_2\varepsilon^{7/2}M_0^2 + c_3\varepsilon^{9/2}M_0^3 + c_R\varepsilon^{5/2} \right) \\ &\leq \varepsilon^{3/2} [C_0 + t\varepsilon (c_2\varepsilon M_0^2 + c_3\varepsilon^2 M_0^3 + c_R)] e^{\tilde{c}\varepsilon t}. \end{aligned}$$

Um die gewünschte Abschätzung zu erhalten, definieren wir M_0 neu als

$$M_0 := C_0 + T_0(c_R + 1)e^{\tilde{c}T_0}.$$

Weiter wählen wir ε_0 so klein, dass $c_2\varepsilon_0 M_0^2 + c_3\varepsilon_0^2 M_0^3 \leq 1$. Dann ist

$$\sup_{t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0]} \|\vec{E}(t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq M_0\varepsilon^{3/2}.$$

Daraus folgt

$$\sup_{t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0]} \|\vec{U}(\cdot, t) - \vec{U}^{\text{ext}}(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{3/2}$$

für $s > d/2$.

Es ist sinnvoll, $q > d/2$ zu wählen, da in diesem Fall die Bedingungen (6.11) und (6.14) erfüllt sind. Damit erhalten wir außerdem die Bedingung, $\sigma \in H^{d+\delta}(\mathbb{T})$, $V \in H^{2d-2+\delta}(\mathbb{T})$ und $W \in H^{2d-2+\delta}(\mathbb{T})$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\|\vec{U}^{\text{ext}}(\cdot, t) - \vec{U}^{\text{app}}(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{3/2} \quad \forall t \in [0, T_0]$. Dafür beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 6.9. *Sei $\hat{A}_j(\cdot, T) \in L^1_{s_A}(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $s_A > 2 \quad \forall T \in [0, \varepsilon^{-1}T_0]$ und $s > d/2$. Es gelten die Regularitätsannahmen (1) bis (3). Dann existiert $C > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, so dass*

$$\|\vec{U}^{\text{ext}}(\cdot, t) - \vec{U}^{\text{app}}(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{3/2},$$

$\varepsilon \in (0, \varepsilon_0), t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0]$.

Beweis. Zunächst wenden wir die Blochtransformation auf den approximativen Ansatz u^{app} an und entwickeln dann den transformierten Ansatz in Blochfunktionen. Dies ist möglich, da wegen $\hat{A}_j(\cdot, T) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ auch $A_j(\cdot, T) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ und damit $u^{\text{app}}(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ist. Wir erhalten

$$U_n^{\text{app}}(k, t) := (\mathcal{DT}(u^{\text{app}}))_n = \varepsilon^{1/2-d} e^{-i\omega_0 t} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, \varepsilon t \right) P_{n, n_0}^{(j, \eta)}(k)$$

mit $P_{n, n_0}^{(j, \eta)}(k) = \langle p_{n_0}(\cdot, k^{(j)} - \eta), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}$. Auch hier schreiben wir den Ansatz \vec{U}^{app} als Summe mit

$$\vec{U}^{\text{app}} = \vec{U}^{\text{app}, 0} + \vec{U}^{\text{app}, 1}.$$

Dabei definieren wir

$$\vec{U}^{\text{app}, 0}(k, t) := \varepsilon^{1/2-d} e^{-i\omega_0 t} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, \varepsilon t \right) P_{n_0, n_0}^{(j, \eta)}(k) e_{n_0},$$

wobei e_{n_0} der n_0 -te Einheitsvektor in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

Wir wissen bereits aus Lemma 6.6, dass $\|\vec{U}^{\text{ext}, 1}(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{3/2} \forall t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0]$. Deshalb bleibt noch zu zeigen, dass

- (i) $\|\vec{U}^{\text{app}, 1}\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{3/2}$
- (ii) $\|\vec{U}^{\text{ext}, 0} - \vec{U}^{\text{app}, 0}\|_{\mathcal{X}(s)} \leq c\varepsilon^{3/2} \forall t \in [0, \varepsilon^{-1}T_0]$.

Zu (i): Wir schätzen $\vec{U}^{\text{app}, 1}$ in der $\mathcal{X}(s)$ -Norm ab. Der Ausdruck $\vec{U}_{n_0}^{\text{app}, 1}$ enthält allerdings keine Beiträge, so dass

$$\|\vec{U}^{\text{app}, 1}(\cdot, t)\|_{\mathcal{X}(s)} = \left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus n_0} n^s |U_n^{\text{app}, 1}(\cdot, t)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1(\mathbb{B})}.$$

Wir kommen also direkt zur Abschätzung von $U_n^{\text{app}, 1}$ für $n \neq n_0$, wobei

$$U_n^{\text{app}, 1} = \varepsilon^{1/2-d} e^{-i\omega_0 t} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, \varepsilon t \right) P_{n, n_0}^{(j, \eta)}(k), \quad n \neq n_0.$$

Wir untersuchen für die Abschätzung von $|U_n^{\text{app}, 1}(\cdot, t)|$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$ den Term $P_{n, n_0}^{(j, \eta)}$. Dabei nutzen wir, dass die Blochfunktionen eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T})$ bilden sowie das Wachstum der Eigenwerte ω_n .

Es ist für $V \in H^a(\mathbb{T})$, $a > 2q + d - 2$

$$P_{n, n_0}^{(j, 0)}(k) = \langle p_{n_0}(\cdot, k), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}} + \langle p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}) - p_{n_0}(\cdot, k), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}) - p_{n_0}(\cdot, k), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}} \\
 &= \frac{1}{\omega_n(k)^q} \langle \mathcal{L}^q(k)(p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}) - p_{n_0}(\cdot, k)), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}} \\
 &\leq c \left(\|p_{n_0}(\cdot, k^{(j)})\|_{H^{2q-1}(\mathbb{T})} \right) n^{-\frac{2q}{d}} |k - k^{(j)}|.
 \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
 P_{n,n_0}^{(j,\eta)}(k) &= \langle p_{n_0}(\cdot, k), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}} + \langle p_{n_0}(\cdot, k^{(j)} - \eta) - p_{n_0}(\cdot, k), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}} \\
 &= \langle p_{n_0}(\cdot, k^{(j)} - \eta) - p_{n_0}(\cdot, k), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}} \\
 &= \frac{1}{\omega_n(k)^q} \langle \mathcal{L}^q(k)(p_{n_0}(\cdot, k^{(j)} - \eta) - p_{n_0}(\cdot, k)), p_n(\cdot, k) \rangle_{\mathbb{T}}.
 \end{aligned}$$

Wegen $p_{n_0}(\cdot, k - \eta) = p_{n_0}(\cdot, k)e^{ik \cdot x}$ ist

$$\|\mathcal{L}^q(k)p_{n_0}(\cdot, k - \eta)\| \leq c|\eta|^{2q},$$

falls $V \in H^a(\mathbb{T})$ mit $a > 2q + d - 2$. Mit dem Wachstum der Eigenwerte $\omega_n \sim cn^{2/d}$ für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$|P_{n,n_0}^{(j,\eta)}(k)| \leq \frac{c}{n^{2q/d}} |\eta|^{2q}$$

für alle $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{B}, j = 1, \dots, N, \eta \in \mathbb{Z}^d$. Wir erhalten insgesamt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 &\left\| \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus n_0} n^{\frac{2s}{d}} |(U^{\text{app},1})_n(k, t)|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \\
 &\leq \int_{\mathbb{B}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus n_0} n^{\frac{2s}{d}} \varepsilon^{3/2-d} \left| \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)}}{\varepsilon}, T \right) P_{n,n_0}^{(j,0)} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{k - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) P_{n,n_0}^{(j,\eta)} \right| \right) \\
 &\leq c\varepsilon^{3/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{N} \setminus n_0} n^{2s/d - 4q/d} \right)^{1/2} \left(\varepsilon^{3/2} \sum_{j=1}^N \|\hat{A}_j(\cdot, T)\|_{L^1_1(\mathbb{R}^d)} \right. \\
 &\quad \left. + \varepsilon^{1/2 + \beta(1-\rho)} \sum_{j=1}^N \|\hat{A}_j(\cdot, T)\|_{L^1_\beta(\mathbb{R}^d)} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} |\eta|^{2q-\beta} \right).
 \end{aligned}$$

Hier ist die $l^2_{s/d}$ -Summierbarkeit in n gegeben, falls $2s/d - 4q/d < -1$, das heißt wir benötigen

$$q > \frac{d}{4} + \frac{s}{2}. \quad (6.14)$$

Für die Summierbarkeit in η muss gelten, dass $\beta > 2q + d$. Für die Regularität der Blochfunktionen in $P_{n,n_0}^{(j,\eta)}$ benötigen wir außerdem, dass $V \in H^a(T)$ mit $a > 2q + d - 2$.

Zu (ii): Für die Abschätzung von $\vec{U}^{\text{ext},0} - \vec{U}^{\text{app},0}$ in der $\mathcal{X}(s)$ -Norm berechnen wir

$$\begin{aligned} & \left\| U_{n_0}^{\text{ext},0} - U_{n_0}^{\text{app},0} \right\|_{L^1(\mathbb{B})} = \\ & \varepsilon^{1/2-d} \left\| \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}}} \sum_{j=1}^N \tilde{A}_j \left(\frac{\cdot - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) - \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{\cdot - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) P_{n_0, n_0}^{(j, \eta)}(\cdot) \right\|_{L^1(\mathbb{B})} \\ & \leq \varepsilon^{1/2-d} \left(\left\| \left(1 - P_{n_0, n_0}^{(j, 0)}(\cdot) \right) \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}}} \sum_{j=1}^N \hat{A}_j \left(\frac{\cdot - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right\|_{L^1(B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)}))} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\eta \in Z_{k^{(j)}}} \sum_{j=1}^N \left\| \hat{A}_j \left(\frac{\cdot - k^{(j)} + \eta}{\varepsilon}, T \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d \setminus B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)}))} \right). \end{aligned}$$

Mit der Normalisierung der Blochwellen und deren Lipschitzstetigkeit bezüglich k erhalten wir wieder

$$\left| 1 - P_{n_0, n_0}^{(j, 0)}(k) \right| = \left| \langle p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}), p_{n_0}(\cdot, k^{(j)}) - p_{n_0}(\cdot, k) \rangle_{L^2(\mathbb{T})} \right| \leq L |k - k^{(j)}|$$

für alle $k \in \mathbb{B}$ und $j = 1, \dots, N$. Weiter ist mit dem Übergang von k zu K

$$\begin{aligned} & \left\| \hat{A}_j \left(\frac{\cdot - k^{(j)}}{\varepsilon}, T \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d \setminus B_{\varepsilon\rho}(k^{(j)}))} = \varepsilon^d \left\| \hat{A}_j(\cdot, T) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d \setminus B_{\varepsilon\rho-1}(0))} \\ & = \varepsilon^d \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - \chi_{B_{\varepsilon\rho-1}(0)} \right) (1 + |K|)^{s_A} (1 + |K|)^{-s_A} \hat{A}_j(K, T) \, dK \\ & \leq \varepsilon^d \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |K|)^{s_A} \hat{A}_j(K, T) \, dK \sup_{K \in B_{\varepsilon\rho-1}} (1 + |K|)^{-s_A} \\ & \leq \varepsilon^{d+(1-\rho)s_A} \left\| \hat{A}_j(K, T) \right\|_{L_{s_A}^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Mit der obigen Rechnung und da wir $\rho = 1/2$ gewählt haben, ist

$$\begin{aligned} \left\| U_{n_0}^{\text{ext},0} - U_{n_0}^{\text{app},0} \right\|_{L^1(\mathbb{B})} & \leq L \varepsilon^{1/2-d+d} \varepsilon \sum_{j=1}^N \left\| \hat{A}_j(\cdot, T) \right\|_{L_1^1(\mathbb{R}^2)} \\ & \quad + c \varepsilon^{1/2} \varepsilon^{1/2s_A} \sum_{j=1}^N \left\| \hat{A}_j(\cdot, T) \right\|_{L_{s_A}^1(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

und daraus folgt für $s_A > 2$ die Behauptung des Lemmas. \square

Wir fassen die Regularitätsbedingungen zusammen, die wir im obigen Beweis benötigt haben. Wir können

$$q = \left\lceil \frac{d}{2} \right\rceil + 1$$

wählen. Mit dieser Bedingung, müssen die Potentiale erfüllen, dass

$$\sigma \in H^{2\lceil \frac{d}{2} \rceil + 2}(\mathbb{T}) \text{ und } V \in H^{2\lceil \frac{d}{2} \rceil + d + \delta}(\mathbb{T}).$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir haben also gezeigt, dass wir eine Lösung u der periodischen nichtlinearen Schrödinger-Gleichung durch einen geeigneten approximativen Ansatz mit einer Lösung der Coupled Mode Gleichungen bis auf einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/2})$ approximieren können, wenn es diese gibt. Die Existenz einer lokalisierten Solitärwelle für die Coupled Mode Gleichungen haben wir in Abschnitt 5.4 für $d = 2$ gezeigt.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Der Kern dieser Arbeit war die Untersuchung von Wellen in der Form von Wellenpaketen in periodischen Strukturen für unterschiedliche Dimensionen. Als asymptotische Skalierung haben wir Wellenpakete aus mehreren tragenden Blochwellen mit unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten betrachtet. Dadurch haben wir ein Amplitudensystem erster Ordnung hergeleitet, die Coupled Mode Gleichungen.

Im eindimensionalen Fall haben die Coupled Mode Gleichungen eine Familie von lokalisierten Solitärwellen, welche durch die Geschwindigkeit $v \in (-1, 1)$ parametrisiert sind. Weil diese Solitärwellen in der spektralen Lücke der Coupled Mode Gleichungen existieren, werden sie Gap Solitone genannt. Wir haben uns mit der Frage beschäftigt, ob für die Coupled Mode Gleichungen in höheren Dimensionen ebenfalls eine Familie von beweglichen Gap Solitonen existiert. Diese würden dann Wellenpakete des ursprünglichen Modells mit einer Reihe von Geschwindigkeiten in einem d -dimensionalen Intervall approximieren. Um das zu untersuchen, haben wir die Coupled Mode Gleichungen hergeleitet und die Struktur ihrer Dispersionsrelation untersucht. Wir benötigten eine Struktur, die eine spektrale Lücke aufweist und zudem am Rand des Spektrums durch ein isoliertes Extremum begrenzt ist. Wir haben herausgefunden, dass die Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen im Fall von zwei Dimensionen und für einen Ansatz aus vier Moden die gewünschte Struktur aufweist.

Für diesen Fall haben wir numerisch stehende Solitärwellen gefunden und anschließend durch NLS Asymptotik die Existenz von lokalisierten Wellen für die Coupled Mode Gleichungen rigoros bewiesen.

Bei der Frage nach beweglichen Solitärwellen für die Coupled Mode Gleichungen in höheren Dimensionen haben wir gesehen, dass in dem oben genannten Fall von $d = 2$ Dimensionen und $N = 4$ Moden mit unserem asymptotischen Zugang keine beweglichen Wellen möglich sind, da sich für den Ansatz von beweglichen Wellen die Lücke in der Dispersionsrelation der Coupled Mode Gleichungen schließt und wir lokalisierte Wellen ausschließlich in der spektralen Lücke suchten.

Die Arbeit umfasst außerdem ein wichtiges Approximationsresultat. Wir haben die Coupled Mode Gleichungen als asymptotisches Modell für die periodische nichtlineare Schrödinger-Gleichung für den allgemeinen Fall von d Dimensionen rigoros gerechtfertigt.

Die beschriebenen Resultate führen zu einer Reihe interessanter Fragestellungen, welche in der Zukunft untersucht werden können.

Ein offenes Problem ist die Existenz beweglicher Solitärwellen für die Coupled Mode Gleichungen in höheren Dimensionen. Wir haben gesehen, dass wir diese mit unserem Ansatz in dem Spezialfall $d = 2$ und $N = 4$ nicht finden konnten. Es könnte ein anderer Ansatz für bewegliche Lösungen gewählt werden oder versucht werden, Lösungen nicht in der spek-

tralen Lücke der Coupled Mode Gleichungen zu finden.

Wir haben uns außerdem in der Rechtfertigung der Coupled Mode Gleichungen auf den Fall eines ω_0 für alle Punkte $(k^{(j)}, \omega_0)$ beschränkt. Dies hatte eine einfachere Schreibweise zur Folge, wird aber in [DW18] für den allgemeinen Fall mit Moden zu den Punkten $(k^{(j)}, \omega_{n_j}(k^{(j)}))$ durchgeführt.

In Kapitel 3.3 haben wir lokale Wohlgestellttheit für die Coupled Mode Gleichungen gezeigt. Ein weiteres Ziel könnte es sein, die globale Wohlgestellttheit für die Coupled Mode Gleichungen zu zeigen.

Anhang

In diesem Kapitel wollen wir hilfreiche Sätze und Lemmata zusammenstellen, welche in der Arbeit benötigt wurden.

Satz A.1. (Banachscher Fixpunktsatz)

Sei X ein Banachraum, $\emptyset \neq K \subset X$ abgeschlossen, $T : K \rightarrow K$ sei kontraktiv, das heißt für ein $\theta < 1$ gilt

$$\|Tx - Ty\| \leq \theta \|x - y\| \quad \forall x, y \in K.$$

Dann hat T einen eindeutigen Fixpunkt.

Beweis. Der Beweis findet sich in [Sch13], Theorem 16.1. □

Lemma A.2. (Algebra Eigenschaft)

Seien $\Phi, \Psi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $s > d/2$. Dann gilt, dass $\Phi, \Psi \in C^0(\mathbb{R}^d)$ und $\|\Phi\|_{C^0} \leq C\|\Phi\|_{H^s}$ und es gilt die Abschätzung

$$\|\Phi\Psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \leq c\|\Phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}\|\Psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

mit c unabhängig von Φ und Ψ .

Beweis. Für den Beweis siehe zum Beispiel Lemma 4.2 in [DU09]. □

Satz A.3. (Duhamels Prinzip)

Sei X ein Banachraum und $L : X \rightarrow X$ ein sektorieller Operator. Für $\alpha, T > 0$ gelte

$$F \in C((0, T), X).$$

Dann ist die eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - Lu &= F \\ u(x, 0) &= u_0. \end{aligned}$$

gegeben durch

$$u(t) = e^{tL}u_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)L}F(\tau)d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Beweis. Für den Beweis siehe Kapitel 4 in [Lun12]. □

Lemma A.4. (Lemma von Gronwall)

Seien $\beta, \gamma \in C([0, T], \mathbb{R})$, $\gamma \geq 0$. Dann gilt:

(i) Wenn eine Funktion $w \in C([0, T], \mathbb{R})$ die Integralungleichung

$$w(t) \leq \beta(t) + \int_0^t \gamma(s)w(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

erfüllt, dann ist

$$w(t) \leq \beta(t) + \int_0^t \beta(r)\gamma(r) \exp\left(\int_r^t \gamma(s)ds\right) dr \quad \forall t \in [0, T].$$

(ii) Wenn $w \in C([0, t], \mathbb{R}) \cap C^1((0, T), \mathbb{R})$ die Ungleichung

$$w' \leq \beta(t) + \gamma(t)w(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

erfüllt, dann ist

$$w(t) \leq w(0) \exp\left(\int_0^t \gamma(s)ds\right) + \int_0^t \beta(r) \exp\left(\int_r^t \gamma(s)ds\right) dr \quad \forall t \in [0, T].$$

Beweis. Der Beweis ist zum Beispiel in [Pac97] zu finden. □

Lemma A.5. (Lemma von Riemann-Lebesgue)

Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und sei \hat{f} die Fouriertransformierte von f , das heißt $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx$. Dann gilt

$$|\hat{f}(k)| \rightarrow 0, \quad |k| \rightarrow \infty.$$

Beweis. Ein Beweis findet sich in [Lig66, Kapitel 4] □

Satz A.6. (Sobolevscher Einbettungssatz)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz Rand Γ . Sei weiter $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p < \infty$.

Wenn

$$k - \frac{n}{p} \geq m + \gamma$$

für $0 < \gamma < 1$ gilt, dann ist die Abbildung $\text{Id}: W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m+\gamma}(\overline{\Omega})$ eine stetige Einbettung, das heißt es existiert ein $c = c(\Omega, n, m, p, k, \gamma)$, so dass für $u \in W^{k,p}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{C^{m+\gamma}(\overline{\Omega})} \leq c \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

gilt.

Beweis. Ein Beweis wird zum Beispiel in Kapitel 8.9 in [Alt12] gegeben. □

Lemma A.7. (Youngsche Ungleichung für Faltungen)

Sei $1 \leq p, r, s \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{s} + 1$. Dann gilt für die Faltung $f * g$ die Abschätzung

$$\|f * g\|_{L^s(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Beweis. Der Beweis findet sich in [Wei00]. □

Satz A.8. (Satz von Plancherel)

Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann sind \hat{u} und $\check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Beweis. Für den Beweis siehe Kapitel 4.3, Satz 1 in [Eva10]. □

Literatur

- [Alt12] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Lehrbuch Masterclass. Springer, 2012. ISBN: 978-3-642-22260-3.
- [AM05] M. Ablowitz und Z. Musslimani. *Spectral renormalization method for computing self-localized solutions to nonlinear systems*. In: 30 (Sep. 2005), S. 2140–2.
- [AP05] D. Agueev und D. Pelinovsky. *Modeling of wave resonances in low-contrast photonic crystals*. In: *SIAM J. Appl. Math.* 65.4 (2005), S. 1101–1129. ISSN: 0036-1399. URL: <https://doi.org/10.1137/040606053>.
- [AS18] J. Arbutich und C. Sparber. *Rigorous derivation of nonlinear Dirac equations for wave propagation in honeycomb structures*. In: *J. Math. Phys.* 59.1 (2018), S. 011509, 18. ISSN: 0022-2488. URL: <https://doi.org/10.1063/1.5021754>.
- [AW89] A.B. Aceves und Wabnitz S. *Self induced transparency solitons in nonlinear refractive media*. In: *Phys. Lett. A* (1989).
- [BSTU06] K. Busch u. a. *Justification of the nonlinear Schrödinger equation in spatially periodic media*. In: *Z. Angew. Math. Phys.* 57.6 (2006), S. 905–939. ISSN: 0044-2275. URL: <https://doi.org/10.1007/s00033-006-0057-6>.
- [BTR98] Broderick N., D. Taverner und D. Richardson. *Nonlinear switching in fibre Bragg gratings*. In: *Opt. Express* 3 (1998), 447–453.
- [CV97] C. Conca und M. Vanninathan. *Homogenization of periodic structures via Bloch decomposition*. In: *SIAM J. Appl. Math.* 57.6 (1997), S. 1639–1659. ISSN: 0036-1399. URL: <https://doi.org/10.1137/S0036139995294743>.
- [DH17] T. Dohnal und L. Helfmeier. *Justification of the coupled mode asymptotics for localized wavepackets in the periodic nonlinear Schrödinger equation*. In: *J. Math. Anal. Appl.* 450.1 (2017), S. 691–726. ISSN: 0022-247X. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.01.039>.
- [Doh14] T. Dohnal. *Traveling solitary waves in the periodic nonlinear Schrödinger equation with finite band potentials*. In: *SIAM J. Appl. Math.* 74.2 (2014), S. 306–321. ISSN: 0036-1399. URL: <https://doi.org/10.1137/130933149>.
- [Doh16] T. Dohnal. *lecture notes dispersive waves*. In: *Vorlesung für dispersive partielle Differentialgleichungen Wintersemester 15/16* (2016). URL: http://pi.mathematik.uni-halle.de/%7Edohnal/TEACH/DISPERSIVE/lect_notes_disp_waves.pdf.

- [DP18] T. Dohnal und D. Pelinovsky. *Bifurcation of nonlinear bound states in the periodic Gross-Pitaevskii equation with PT -symmetry*. In: *ArXiv e-prints* (Feb. 2018). arXiv: 1702.03469 [math.DS]. URL: <https://arxiv.org/abs/1702.03469>.
- [DPS09] T. Dohnal, D. Pelinovsky und G. Schneider. *Coupled-mode equations and gap solitons in a two-dimensional nonlinear elliptic problem with a separable periodic potential*. In: *J. Nonlinear Sci.* 19.2 (2009), S. 95–131. ISSN: 0938-8974. URL: <https://doi.org/10.1007/s00332-008-9027-9>.
- [DR18] T. Dohnal und D. Rudolf. *NLS approximation for wavepackets in periodic cubically nonlinear wave problems in \mathbb{R}^d* . In: *ArXiv e-prints* (Okt. 2017). arXiv: 1710.07077 [math.AP].
- [DU09] T. Dohnal und H. Uecker. *Coupled mode equations and gap solitons for the 2D Gross-Pitaevskii equation with a non-separable periodic potential*. In: *Phys. D* 238.9-10 (2009), S. 860–879. ISSN: 0167-2789. URL: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2009.02.013>.
- [DU11] T. Dohnal und H. Uecker. *Erratum to “Coupled mode equations and gap solitons for the 2D Gross-Pitaevskii equation with a non-separable periodic potential” [Physica D 238 (2009) 860–879] [MR2531185]*. In: *Phys. D* 240.3 (2011), S. 357–362. ISSN: 0167-2789. URL: <https://doi.org/10.1016/j.physd.2010.09.012>.
- [DW18] T. Dohnal und L. Wahlers. *Coupled Mode Equations and Gap Solitons in Higher Dimensions*. In: *ArXiv e-prints* (Okt. 2018). arXiv: 1810.04944 [math.AP]. URL: <http://adsabs.harvard.edu/abs/2018arXiv181004944D>.
- [Eva10] L. C. Evans. *Partial differential equations*. Second. Bd. 19. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, S. xxii+749. ISBN: 978-0-8218-4974-3. URL: <https://doi.org/10.1090/gsm/019>.
- [Gel50] I. M. Gelfand. *Expansion in characteristic functions of an equation with periodic coefficients*. In: *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)* 73 (1950), S. 1117–1120.
- [GFW16] W. Guo u. a. *Sharp Weighted Convolution Inequalities and Some Applications*. In: *ArXiv e-prints* (Feb. 2016). arXiv: 1602.02859 [math.CA].
- [GMS08] J. Giannoulis, A. Mielke und C. Sparber. *Interaction of modulated pulses in the nonlinear Schrödinger equation with periodic potential*. In: *J. Differential Equations* 245.4 (2008), S. 939–963. ISSN: 0022-0396. URL: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2008.05.001>.
- [GT01] D. Gilbarg und N. S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Reprint of the 1998 edition. Springer-Verlag, Berlin, 2001, S. xiv+517. ISBN: 3-540-41160-7.
- [GWH01] R. H. Goodman, M. I. Weinstein und P. J. Holmes. *Nonlinear propagation of light in one-dimensional periodic structures*. In: *J. Nonlinear Sci.* 11.2 (2001), S. 123–168. ISSN: 0938-8974. URL: <https://doi.org/10.1007/s00332-001-0002-y>.

-
- [Hoe85] L. Hörmander. *The analysis of linear partial differential operators. III*. Classics in Mathematics. Pseudo-differential operators, Reprint of the 1994 edition. Springer, Berlin, 2007, S. viii+525. ISBN: 978-3-540-49937-4. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-540-49938-1>.
- [JMW95] J. D. Joannopoulos, R. D. Maede und J. N. Winn. *Photonic Crystals, Molding the Flow of Light*. 1995.
- [Kat95] T. Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Classics in Mathematics. Reprint of the 1980 edition. Springer-Verlag, Berlin, 1995, S. xxii+619. ISBN: 3-540-58661-X.
- [KSM92] P. Kirrmann, G. Schneider und A. Mielke. *The validity of modulation equations for extended systems with cubic nonlinearities*. In: *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* 122.1-2 (1992), S. 85–91. ISSN: 0308-2105. URL: <https://doi.org/10.1017/S0308210500020989>.
- [Lig66] M.J. Lighthill. *Einfuehrung in die Theorie der Fourier analysis und der verallgemeinerten Funktionen*. BI Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut, 1966. URL: <https://books.google.de/books?id=n9qGtAEACAAJ>.
- [LRE11] Z. Lin u. a. *Unidirectional Invisibility Induced by PT-Symmetric Periodic Structures*. In: *Physical Review Letters* 106.21, 213901 (Mai 2011), S. 213901. arXiv: 1108.2493 [physics.optics].
- [Lun12] A. Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Modern Birkhäuser Classics. Dordrecht: Springer, 2012. URL: <http://cds.cern.ch/record/1568639>.
- [Max64] J. Maxwell. *Eine dynamische Theorie des elektromagnetischen Feldes*. In: *Physikalische Blätter* 21.5 (1964), S. 208–213. URL: <https://online-library.wiley.com/doi/abs/10.1002/phbl.19650210504>.
- [NY14] S. D. Nixon und J. Yang. *Exponential asymptotics for solitons in PT-symmetric periodic potentials*. In: *Stud. Appl. Math.* 133.4 (2014), S. 373–397. ISSN: 0022-2526. URL: <https://doi.org/10.1111/sapm.12057>.
- [Pac97] B. G. Pachpatte. *Inequalities for differential and integral equations*. Bd. 197. Mathematics in Science and Engineering. Academic Press, San Diego, CA, 1998, S. x+611. ISBN: 0-12-543430-8.
- [Pel11] D. Pelinovsky. *Localization in periodic potentials*. Bd. 390. London Mathematical Society Lecture Note Series. From Schrödinger operators to the Gross-Pitaevskii equation. Cambridge University Press, Cambridge, 2011, S. x+398. ISBN: 978-1-107-62154-1. URL: <https://doi.org/10.1017/CB09780-511997754>.
- [Pet76] V. I. Petviashvili. *Equation of an extraordinary soliton*. In: *Fizika Plazmy* 2 (Mai 1976), S. 469–472.
- [PS04] D. Pelinovsky und Y. Stepanyants. *Convergence of Petviashvili’s iteration method for numerical approximation of stationary solutions of nonlinear wave equations*. In: *SIAM J. Numer. Anal.* 42.3 (2004), S. 1110–1127. ISSN: 0036-1429. URL: <https://doi.org/10.1137/S0036142902414232>.

- [Re76] M. Reed. *Abstract Nonlinear Wave Equations*. Pure and Applied Mathematics. Springer, 1976.
- [Sch13] B. Schweizer. *Partielle Differentialgleichungen*. Eine anwendungsorientierte Einführung. [An application-oriented introduction]. Springer-Verlag, Berlin, 2013, S. 599. ISBN: 978-3-642-40637-9; 978-3-642-40638-6. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-40638-6>.
- [SH07] Y. P. Shapira und M. Horowitz. *Optical logic gates based on soliton interaction in fiber Bragg gratings*. In: *Bragg Gratings, Photosensitivity, and Poling in Glass Waveguides, Quebec City, Canada, Optical Society of America, Washington 3* (2007), 447–453.
- [SI07] S. Fujita und K. Ito. *Quantum Theory of Conducting Matter: Newtonian Equations of Motion for a Bloch Electron*. 1st. Springer Publishing Company, Incorporated, 2007. ISBN: 038774102X, 9780387741024.
- [SR78] M. Reed und B. Simon. *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978, S. xv+396. ISBN: 0-12-585004-2.
- [SU01] G. Schneider und H. Uecker. *Nonlinear coupled mode dynamics in hyperbolic and parabolic periodically structured spatially extended systems*. In: *Asymptot. Anal.* 28.2 (2001), S. 163–180. ISSN: 0921-7134.
- [Tri92] H. Triebel. *Higher analysis*. Hochschulbücher für Mathematik. Johann Ambrosius Barth Verlag GmbH, Leipzig, 1992, S. 473. ISBN: 3-335-00321-7.
- [Wei00] J. Weidmann. *Lineare Operatoren in Hilberträumen. Teil 1*. Mathematische Leitfäden. [Mathematical Textbooks]. Grundlagen. [Foundations]. B. G. Teubner, Stuttgart, 2000, S. 475. ISBN: 3-519-02236-2. URL: <https://doi.org/10.1007/978-3-322-80094-7>.
- [Whi74] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. Pure and Applied Mathematics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, 1974, S. xvi+636.