Elisa LANKEIT & Rolf BIEHLER, Paderborn

Vorstellung einer Elaborationsaufgabe zu den verschiedenen Differenzierbarkeitsbegriffen im Mehrdimensionalen

Differenzierbarkeit und Ableitungen sind wichtige Themen sowohl in der Schule als auch in der Hochschule. Wie jedoch bereits Rasmussen, Marrongelle, und Borba (2014) festgestellt haben, gibt es wenig Literatur, die über die frühen Themen der Differentialrechnung hinausgeht. Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ ist ein bisher sehr wenig beleuchtetes, in der Hochschulmathematik jedoch sehr relevantes Thema. Wie gut gelingt der Transfer der Konzepte aus dem Ein- ins Mehrdimensionale und welche speziellen Schwierigkeiten bringt das Konzept der Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^n$ mit sich? In diesem wenig beforschten Bereich haben Martínez-Planell, Gaisman und McGee (2015) studentisches Verständnis der Differentialrechnung von Funktionen zweier Variablen mit Hilfe des APOS-Frameworks untersucht und dabei den Fokus auf das geometrische Verständnis gelegt.

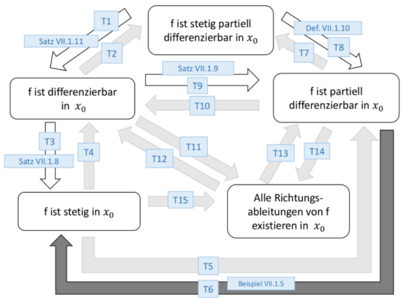
Die hier vorgestellte Studie fand im Rahmen der Analysis-II-Veranstaltung im Sommersemester 2018 in Paderborn statt. Diese wird planmäßig von Mathematikstudierenden des zweiten Semesters, Studierenden des gymnasialen Lehramts im vierten Semester sowie Informatik- und Physikstudierenden mit entsprechend gewähltem Schwerpunkt besucht. Im Rahmen der Präsenzübungen wurden zwei spezielle Aufgaben gestellt, deren zugehörigen schriftlichen Bearbeitungen eingesammelt und analysiert wurden. Forschungsfragen in diesem Kontext sind, wie Studierende mit verschiedenen Differenzierbarkeitsbegriffen umgehen und wo besondere Schwierigkeiten liegen, sowie wie Aufgaben aussehen können, die Studierende zur Verknüpfung alten Wissens mit den neuen Konzepten anregen. In diesem Paper werden die zweite der speziell entwickelten Aufgaben sowie die zugehörigen Lösungsquoten bei der schriftlichen Bearbeitung durch die 31 Teilnehmer/innen aus den Präsenzübungen vorgestellt.

Die Aufgabe zu den Beziehungen zwischen verschiedenen Differenzierbarkeitsbegriffen

Im $\mathbb{R}^n$ gibt es mehr als einen Differenzierbarkeitsbegriff: Neben der (totalen) Differenzierbarkeit (definiert über die Existenz einer linearen Abbildung, sodass ein Restterm klein wird) werden noch Richtungsableitungen sowie partielle Ableitungen diskutiert. Die Richtungsableitung wurde dabei in dieser Analysis-II-Vorlesung als einseitiger Grenzwert definiert, sodass z.B. im eindimensionalen Fall für die Betragsfunktion im Nullpunkt alle Richtungsableitungen existieren. In der Aufgabe (s. Abbildung 1) sollten die

Studierenden die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Begriffen erkunden. Der hier gezeigten Aufgabe war noch Teil a) vorgeschaltet, in dem die Studierenden selbst herausfinden sollten, welche der Implikationen bereits in der Vorlesung behandelt worden waren. Beim Design der Aufgabe waren dabei die Prinzipien des Verknüpfungs-, Vertiefungs-, Forschungs- und adidaktischen Potentials nach (Gravesen, Grønbæk, & Winsløw, 2016) maßgeblich.

In diesem Diagramm ist markiert, welche Zusammenhänge aus der Vorlesung bekannt sein sollten. (Weiß bedeutet, dass die Implikation gilt, dunkelgrau, dass sie nicht gilt.)



b) Dass Pfeil 6 nicht gilt, wurde mit der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{falls } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{falls } x = (0,0) \end{cases}$$

begründet. Warum bedeutet dieses Beispiel, dass die Implikation nicht gilt?

c) Betrachte als nächstes die Rückrichtungen der laut Vorlesung geltenden Implikationen, also die Pfeile T10, T7, T2 und T4. Kreuze an, ob sie wahr oder falsch sind, und beweise deine Behauptungen.

d) Wie hängen Differenzierbarkeit und die Existenz aller Richtungsableitungen zusammen? Untersuche, ob die Pfeile T11 und T12 gelten.

e) Untersuche den Zusammenhang zwischen partieller Differenzierbarkeit und der Existenz aller Richtungsableitungen, indem du überprüfst, ob die Pfeile T13 und T14 gelten.

f) Kann man aus der Stetigkeit einer Funktion im Punkt x_0 folgern, dass sie in diesem Punkt partiell differenzierbar sein muss oder alle Richtungsableitungen in diesem Punkt existieren müssen? (D.h. untersuche die Pfeile T5 und T15.)

Abbildung 1: Der Aufgabentext

Methoden der Datenanalyse

Die eingesammelten Lösungen wurden durchgesehen und in folgender Weise bewertet: Für jede Implikation wurde zunächst die Entscheidung über die Korrektheit der Implikation kategorisiert (A). Dabei wurde für die korrekte Entscheidung, ob die Implikation wahr oder falsch ist, ein Punkt vergeben. In einem zweiten Kategorisierungsschritt wurde die Begründung dafür betrachtet (B). In (B) wurden 2 Punkte für vollständig richtige Begründungen (ggf. mit kleinen formalen Mängeln), ein Punkt für einen sinnvollen Begründungsansatz (inkl. Folgefehler) und null Punkte für falsche oder unverständliche Begründungen vergeben. Fehlende Werte wurden unterschieden nach „Versuchen“ und „Nicht-Versuchen“: Als „Versuch“ zählen die Bearbeitungen, bei denen zu dem entsprechenden Aufgabenteil nichts geschrieben, aber nachfolgende Aufgabenteile oder der zugehörige Aspekt A bearbeitet wurden. Nicht-Versuche wurden aus der Berechnung der Lösungsquoten ausgeschlossen, weil einige Studierende die späteren Aufgabenteile aus Zeitgründen nicht bearbeitet haben, was nichts über die Schwierigkeit dieser Aufgabenteile aussagt, insbesondere da nicht alle Studierende zur selben Zeit mit den Aufgaben begonnen haben, weil einige zu spät zu den Übungen kamen. Die Lösungsquoten wurden dann berechnet als Summe der insgesamt erreichten Punkte geteilt durch die Anzahl der durch alle Studierenden, die einen Lösungsversuch unternahmen, erreichbaren Maximalpunktzahl.

Ergebnisse

Die Lösungsquoten für Aspekt A und B für alle Implikationen sind in Abbildung 2 zu finden.

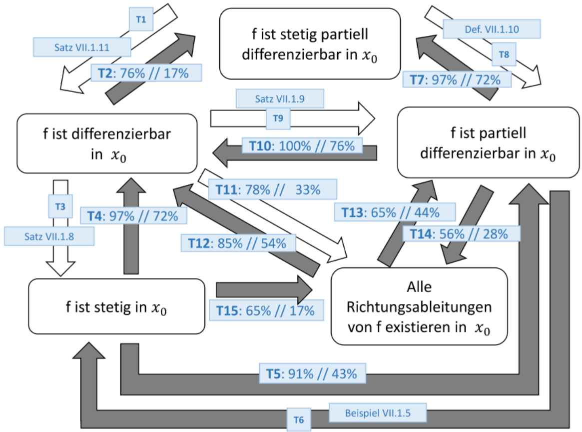


Abbildung 2: Lösungsquoten der einzelnen Aufgabenteile (Richtige Entscheidung über Korrektheit der Implikation (A) // Begründung (B)). Wahre Implikationen sind weiß, falsche grau markiert

Es zeigt sich in den Lösungsquoten, dass die Implikationen T10 („Folgt aus partieller Differenzierbarkeit in einer Stelle die Differenzierbarkeit dort?"), T4 („Folgt aus Stetigkeit Differenzierbarkeit?") und T7 („Folgt stetige partielle Differenzierbarkeit, wenn die Funktion partiell differenzierbar ist?") den Studierenden besonders leicht fielen, sowohl was die Entscheidung über die Korrektheit der Implikation als auch deren Begründung betrifft. In Hinblick auf Aspekt A fielen den Studierenden die Zusammenhänge zwischen der Existenz von Richtungsableitung und partieller Ableitung (T14, T13) sowie zur Stetigkeit (T15) besonders schwer. Die Begründung zu T15 zusammen mit der Begründung zu T2 sind die mit der niedrigsten Lösungsquote im Aufgabenteil (B). Darüber hinaus waren die Studierenden auch bei T14 und T11 wenig erfolgreich. Interessant ist auch, dass für T5 den meisten Studierenden klar war, dass diese Implikation falsch ist, für die Begründung aber insgesamt weniger als die Hälfte der möglichen Punkte erreicht wurde.

Diskussion der Ergebnisse

In der Aufgabe setzen die Studierenden sich mit den neuen Differenzierbarkeitsbegriffen im $\mathbb{R}^n$ auseinander. Dabei können sie auf Wissen aus der Analysis I zurückgreifen und müssen die neuen Differenzierbarkeitsdefinitionen mit dem Differenzierbarkeitsbegriff aus dem Eindimensionalen in Einklang bringen. Viele Implikationen können bereits durch Beispiele $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ widerlegt werden, was das Verknüpfungspotential mit Wissen aus der Schule oder der Analysis I belegt. Es zeigt sich, dass der Begriff der Richtungsableitung in der Form, wie er in dieser Vorlesung eingeführt wurde, Probleme bereitet, obwohl (oder vielleicht weil) die Richtungsableitung so eingeführt wurde, dass der Begriff möglichst anschaulich ist, aber keine direkte Entsprechung in der eindimensionalen Analysis hat (da „einseitige Ableitungen" nicht behandelt wurden). Dass die Begründungen für T15 und T2 sehr geringe Lösungsquoten aufweisen, wurde bereits in der A-Priori-Analyse erwartet, da hierfür ungewöhnliche Beispiele herangezogen werden müssen und die Standardbeispiele (Betragsfunktion sowie die Beispielfunktion, an die in Aufgabenteil b) erinnert wird) hierfür nicht angewendet werden können.

Ausblick

Neben der rein zahlenmäßigen Übersicht über die Lösungsquoten ist natürlich auch eine inhaltliche Betrachtung interessant, welche Begründungen die Studierenden genau genannt haben. Dies wurde mittels qualitativer Inhaltsanalyse codiert und muss noch genauer analysiert werden. Darüber hinaus wurden acht Studierendenpaare bei der Lösung der Aufgabe unter Laborbedingungen gefilmt, sodass weitere Einsichten in die Lösungsprozesse möglich sind. Hierzu planen wir weitere Auswertungen sowie eine Überarbeitung der Aufgabe auf Grundlage der durchgeführten Analysen.

Literatur

Gravesen, K. F., Grønbæk, N., & Winsløw, C. (2016). Task Design for Students' Work with Basic Theory in Analysis: the Cases of Multidimensional Differentiability and Curve Integrals. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 3*(1), 9-33. doi:10.1007/s40753-016-0036-z

Martínez-Planell, R., Gaisman, M. T., & McGee, D. (2015). On students' understanding of the differential calculus of functions of two variables. *The Journal of Mathematical Behavior, 38*, 57-86. doi:10.1016/j.jmathb.2015.03.003

Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? *Zdm, 46*(4), 507-515. doi:10.1007/s11858-014-0615-x