Felix LENSING, Berlin

»Something is rotten in the state of Denmark« – Reflexionen zum Begründungsproblem der vollständigen Induktion

1. Welches Problem löst die vollständige Induktion?

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, mit dem begründet werden kann, dass eine Aussageform allgemeingültig in den natürlichen Zahlen ist. Aber: (1) Warum ist es problematisch, von einer Aussageform zu sprechen, die für allen natürlichen Zahlen gilt? Und weiter: (2) Wie löst die vollständige Induktion dieses Problem?

Zu (1): In einem endlichen Gegenstandsbereich, zum Beispiel der Menge der Personen in einem Raum, ist die Prüfung der Gültigkeit einer All-Aussage unproblematisch: Ob alle Personen in einem Raum einen Schal tragen, lässt sich dadurch überprüfen, dass jede einzelne Person darauf untersucht wird, ob er bzw. sie einen Schal trägt oder nicht. ›Alle Personen im Raum tragen einen Schal‹ bedeutet ›Person 1 trägt einen Schal *und* Person 2 trägt einen Schal *und* Person 3 trägt einen Schal usw.‹. Zur Verifikation wird die All-Aussage in eine Konjunktion von endlich vielen Teilaussagen zerlegt. Aber was bedeutet eine All-Aussage wie zum Beispiel ›$\forall n \epsilon \mathbb{N}: 3 + n \neq 2$‹? Man wird vielleicht antworten, dass sie einfach ›$(3 + 1 \neq 2) \wedge (3 + 2 \neq 2) \wedge (3 + 3 \neq 2)$ usw.‹ bedeutet. Aber hier ergibt sich eine Schwierigkeit, da das Wort ›usw.‹ nicht durch eine vollständige Auflistung aller Teilaussagen ersetzt werden kann. Da es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, würde die Konjunktion auch unendlich viele Glieder umfassen. Das obige Verifikationsverfahren fällt damit offenbar als Alternative aus, denn dazu wären unendlich viele Verifikationsschritte nötig. Damit ergibt sich die folgende Präzisierung des Problems: *Wie kann die Allgemeingültigkeit einer Aussageform in den natürlichen Zahlen in endlich vielen Schritten verifiziert werden?*

Zu (2): Durch vollständige Induktion wird eine All-Aussage begründet, indem die Wahrheit von zwei anderen Aussagen nachgewiesen wird. Zunächst wird gezeigt, dass die Aussageform $A(n)$ für $n = 1$ in eine wahre Aussage übergeht (*Induktionsanfang* – kurz: ›(IA)‹). Dann wird gezeigt, dass unter der Voraussetzung, dass die Aussageform für eine bestimmte natürliche Zahl $n = k$ in eine wahre Aussage übergeht, die Aussageform auch für ihren Nachfolger $k + 1$ gültig ist (*Induktionsschritt* – kurz: ›(IS)‹). Aus diesen beiden Prämissen wird dann geschlossen, dass die zugehörige All-Aussage wahr ist (*Induktionsschluss*). Der Beweis durch vollständige Induktion hat die Form:

(IA) und (IS) sind wahr, *also* ist die zugehörige All-Aussage wahr.

Das Besondere am Induktionsbeweis ist also, dass die zu beweisende All-Aussage im Beweis selbst überhaupt nicht vorkommt. Der Schluss auf die All-Aussage wird gewissermaßen am Ende noch hinzugefügt, obwohl alles, was begründet wurde, eigentlich nur die Wahrheit der Aussagen (IA) und (IS) ist. Wie kann dieser Schluss dann aber gerechtfertigt werden? Die Standardargumentation (vgl. Kirsch, 1994, S. 153f.) lautet wie folgt: Durch das Zusammenspiel von (IA) und (IS) mit der logischen Schlussregel *Modus ponens* schreitet die Verifikation unaufhaltsam von einer natürlichen Zahl zur nächsten, bis die Aussageform schließlich für alle natürlichen Zahlen verifiziert worden ist. Nach (IA) gilt die Aussageform für die Zahl 1. Eine erste Anwendung von (IS) liefert: Wenn die Aussageform für 1 gilt, dann gilt sie auch für 2. Also gilt sie für die Zahl 2. Und wieder nach (IS): Wenn sie für 2 gilt, so gilt sie auch für 3. Also gilt sie für die Zahl 3 usw. Aber welcher Sinn verbirgt sich hier hinter dem Zeichen ›usw.‹? Das Verifikationsverfahren ist ja nur dann durchführbar, wenn das ›usw.‹ durch eine endliche Anzahl von logischen Schritten ersetzt werden kann. Nun ist es zwar richtig, dass die Aussageform für jede natürliche Zahl, wie groß auch immer diese Zahl gewählt wird, in endlichen vielen Schritten verifiziert werden kann, aber daraus folgt keineswegs bereits, dass die Aussageform *deshalb* auch für alle natürlichen Zahlen gültig sein muss. Für diesen Schluss bedürfte es nämlich einer »unendlichen Anzahl von Syllogismen« (Poincaré, 1914, S. 13). Die beiden Prämissen (IA) und (IS) liefern, anders gesagt, noch keine ausreichende Basis, um die Gültigkeit der zugehörigen All-Aussage allein mit Hilfe der Schlussregeln der formalen Logik abzuleiten. Aber wie kann der Sprung über den Abgrund, der Übergang vom Endlichen zum Unendlichen, denn dann bewerkstelligt werden?

2. Drei Lösungen des Problems und das Problem der Lösungen

Eine erste Lösungsmöglichkeit besteht darin, einfach ein Axiom einzuführen, welches die Gültigkeit des Induktionsschlusses sicherstellt. Diesen Weg ist Guiseppe Peano (1889) gegangen. Alternativ kann aber auch die Existenz einer unendlichen Menge axiomatisch eingesetzt werden, die *per definitionem* eine Struktur aufweist, auf die das Beweisverfahren der vollständigen Induktion angewendet werden kann. Dieser Weg kann mit dem Namen Dedekind assoziiert werden, auch wenn dieser noch davon ausging, die Existenz einer solchen Menge ›beweisen‹ zu können (Dedekind, 1888, §66). Eine dritte Lösungsmöglichkeit besteht darin – und diese Ansicht hat Poincaré (1914, S. 13) und nach ihm auch Felix Klein (1924, S. 12) vertreten –, die Gültigkeit des Induktionsschluss für schlichtweg nicht begründbar zu erklären. Der Induktionsschluss muss als »echt intuitiv« (Klein, 1924, S. 12) angesehen werden, das heißt, er ist sowohl dem analytischen Beweis als auch der Erfahrung unzugänglich. Der Induktionsschluss stellt ein *synthetisches Urteil a priori* (im Kantischen Sinne) dar (vgl. Poincaré, 1914, S. 13).[1]

Das Begründungsproblem, also der Versuch, die Gültigkeit des Induktionsschlusses zu rechtfertigen, wird in allen drei Lösungen umgangen, indem implizit oder explizit etwas vorausgesetzt wird, was letztlich nichts anderes ist, als eben dieser Übergang selbst. Alle drei Problemlösungen führen also dazu, dass das Problem in seiner eigenen Lösung durch die Hintertür zurückkehrt. Wie aber löst man ein unlösbares Problem? Bisher haben wir die All-Aussage einfach so behandelt, als wenn sie schon für sich genommen einen klar bestimmten Sinn hätte. Jeder Versuch, den Übergang von (IA) und (IS) zur All-Aussage als einen logischen Schluss zu rechtfertigen, setzt ja voraus, dass die All-Aussage auch unabhängig von (IA) und (IS) sinnvoll behauptet werden kann. Andernfalls würde die Frage, inwiefern die All-Aussage aus (IA) und (IS) *folgt*, überhaupt keinen Sinn machen. Aber ist das wirklich der Fall? Was bedeutet denn eine All-Aussage in den natürlichen Zahlen, sobald wir von der vollständigen Induktion absehen?

3. Wittgenstein über das Begründungsproblem

Wir haben bereits gesehen, dass die Deutung der Allgemeingültigkeit nicht einfach vom endlichen Fall auf den unendlichen Fall übertragen werden kann. Wir haben also *vor* dem Beweis durch vollständige Induktion in Wirklichkeit noch überhaupt keine Möglichkeit, eine Auskunft darüber zu geben, wovon wir eigentlich sprechen, wenn wir sagen, dass dieses oder jenes ›für alle natürlichen Zahlen‹ gilt. Die vollständige Induktion ist, mit anderen Worten, nicht *eine* neben *anderen* Möglichkeiten, um über die Richtigkeit einer All-Aussage in den natürlichen Zahlen zu entscheiden, sondern sie ist das *einzige* Kriterium, über das wir verfügen (vgl. Wittgenstein, 1978, S. 402).

Wir müssen daher fragen: Wie wird durch die vollständige Induktion bestimmt, was es heißt, dass eine Aussageform allgemeingültig in den natürlichen Zahlen ist? Es ist diese Verschiebung des Problemgesichtspunktes, durch welche das Rätsel des Induktionsschlusses aufgeklärt werden kann: »Wir sagen nicht, daß der Satz $A(x)$, wenn $A(1)$ gilt und aus $A(k)$ $A(k+1)$ folgt, *darum* für alle Kardinalzahlen wahr ist; sondern: ›der Satz $A(x)$ gilt für alle Kardinalzahlen‹ *heißt* ›er gilt für $x = 1$ und $A(k+1)$ folgt aus $A(k)$‹« (Wittgenstein, 1978, S. 406).

[1] Dieser Artikel stellt eine stark gekürzte Fassung des vollständigen Vortragsmanuskripts dar, welches unter dem nachfolgenden Link abgerufen werden kann: https://www.researchgate.net/profile/Felix_Lensing2.

Wir geben der Aussage, die von allen natürlichen Zahlen handelt, also durch die vollständige Induktion überhaupt erst einen bestimmten Sinn. Die All-Aussage *folgt* nicht aus (IA) und (IS) und es handelt sich bei dem Induktionsschluss auch nicht um ein synthetisches Urteil a priori. »[E]s ist überhaupt keine Wahrheit, sondern eine Festsetzung, welche besagt: Wenn eine Formel $f(x)$ für $x = 1$ gilt und $f(c+1)$ aus $f(c)$ folgt, so sagen wir es sei ›die Formel $f(x)$ für alle natürlichen Zahlen bewiesen‹« (Waismann, 2012, S. 70). Durch den Induktionsbeweis wird überhaupt erst festgelegt, wovon wir sprechen, wenn wir im Fall der natürlichen Zahlen von ›für alle‹ sprechen: »Die Induktion ist der Ausdruck für die arithmetische Allgemeinheit« (Wittgenstein, 2015, S. 150). Die Induktion verhält sich zur All-Aussage »nicht wie der Beweis zum Bewiesenen, sondern wie das Bezeichnete zum Zeichen« (ebd., S. 202).

Die Unmöglichkeit, den Sprung vom Endlichen zum Unendlichen zu bewältigen, lag also letztlich in einer falschen Auffassung des Unendlichen begründet. Die vollständige Induktion regiert das Unendliche nicht dadurch, dass sie die einzelnen Zahlen ›abläuft‹ und schließlich alle natürlichen Zahlen *wirklich* erreicht haben wird. Das Unendliche liegt vielmehr gerade darin, dass sie wesentlich keine natürliche Zahl ausschließt. Dass jede bestimmte natürliche Zahl in endlich vielen logischen Schritten erreicht werden *kann*, eben darin, in dieser Möglichkeit, liegt das Unendliche. Und wenn diese unendliche Möglichkeit durch eine Induktion gegeben ist, eben dann sind wir sind bereit, davon zu sprechen, dass eine Aussageform für alle natürlichen Zahlen gültig ist: »Wie ein Scheinwerfer Licht in den unendlichen Raum wirft, so beleuchtet er allerdings alles, was in seiner Richtung liegt, aber man kann nicht sagen, er beleuchtet die Unendlichkeit« (Wittgenstein, 2015, S. 162).

Literatur

Dedekind, R. (1924). *Was sind und was sollen Zahlen?*. Wiesbaden: Vieweg.

Kirsch, A. (1994). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis-Verlag.

Klein, F. (1924). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus. Erster Band*. Berlin: Springer.

Peano, G. (1889). *Arithmetices principia: nova methodo exposita*. Rom: Fratres Bocca.

Poincaré, H. (1914). *Wissenschaft und Hypothese*. Leipzig: Teubner.

Waismann, F. (2012). *Einführung in das mathematische Denken*. Darmstadt: WBG.

Wittgenstein, L. (2015). *Philosophische Bemerkungen*. Frankfurt: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. (1978). *Philosophische Grammatik*. Frankfurt: Suhrkamp