Denise LENZ, Halle a. d. Saale

Relationales Denken und das Umgehen mit unbekannten Mengen- Einblicke in das Fallbeispiel eines Kindergartenkindes

Die folgende Studie untersucht die Fähigkeiten von Kindern im Alter von 5 bis 10 Jahren bezüglich des Herstellens von Beziehungen zwischen bekannten und unbekannten Mengen, welche als unterschiedlich farbige Kästchen und Murmeln repräsentiert wurden. Zunächst wird das relationale Denken als Aspekt des algebraischen Denkens sowie wichtige Aspekte von Variablen beschrieben. Relationales Denken wird als bedeutender Bestandteil algebraischen Denkens betrachtet (u.a. Kieran 2011). Es beschreibt das Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen Elementen mathematischer Ausdrücke, wobei bspw. Gleichungen als Ganzes, statt als auszuführender Prozess betrachtet werden, um die erkannten Beziehungen für eine Lösungsfindung zu nutzen (vgl. Molina et al. 2009). Neben dem Verständnis des relationalen Denkens in Bezug auf Gleichungen und formale Ausdrücke kann dies auch auf die Erkennung und Verwendung von Beziehungen zwischen Mengen erweitert werden. Der Umgang mit Variablen ist ein weiterer wichtiger Bestandteil algebraischen Denkens. Nach Freudenthal (1973) können mindestens drei verschiedene Variablenaspekte unterschieden werden: *Unbekannte* beschreiben eine unbestimmte Zahl, deren Wert jedoch eindeutig bestimmt werden kann. *Veränderliche*: Die Variable als Veränderliche durchläuft durch sukzessive Einsetzung einen Zahlenbereich. *Allgemeine Zahlen* beschreiben unbestimmte Zahlen, die in Verallgemeinerungen erscheinen, wie etwa die symbolische Beschreibung der Rechengesetze. Neben diesen drei Variablenaspekten wird eine weitere Klassifizierung basierend auf empirischen Daten diskutiert. Kinder verwenden häufig *Quasi-Variable*, um Allgemeinheit auszudrücken, bevor sie die Möglichkeit haben, algebraische Sprache zu verwenden: dabei werden allgemeine Strukturen durch die Verwendung von Beispielen ausgedrückt (Fujii & Stephens, 2001).

Fragestellung und Untersuchungsdesign

Die folgende Studie beschäftigt sich mit der Frage: Wie beschreiben Vor- und Grundschulkinder die Beziehungen zwischen bekannten und unbekannten Mengen, die mit konkreten Materialien dargestellt werden? Wie verstehen sie die dargestellten unbekannten Mengen? Die Interviewstudie wurde an 82 Kindern im Alter von 5 bis 10 Jahren durchgeführt. Es nahmen 5 bis 6 Jahre alte Kindergartenkinder (n = 27), 7 bis 8-jährige Zweitklässler (n = 28) und 9 bis 10-jährige Viertklässler (n = 26) teil. Die Kinder erhielten zuvor keinen speziellen algebraspezifischen Unterweisungen. Um die

Kompetenzen von Kindern hinsichtlich dem Herstellen von Beziehungen zwischen bekannten und unbekannten Mengen zu erfassen, wurde ein exploratives Design erstellt, bei dem verschiedene Arten von Gleichungen mit einer oder zwei Unbekannten in eine Darstellung übersetzt wurden, die bereits Kindergartenkinder handhaben können. Bekannte Mengen wurden als Murmeln dargestellt und unbekannte Mengen als Kästchen mit einer unbekannten Menge an Murmeln im Inneren dargestellt. Es wurde eine Geschichte erzählt: „Hier siehst du zwei Kinder: Tino und Anna. Sie spielen mit Murmeln. Einige Murmeln sind in verschiedenfarbigen Kisten verpackt und einige Murmeln sind einzeln. Kisten mit der gleichen Farbe enthalten immer die gleiche Menge an Murmeln." Die Studie umfasst 12 Aufgaben in vier verschiedenen Aufgabentypen, welche unterschiedliche Variablenaspekte aufgreifen. Bei Aufgaben des Typs C kann über den Inhalt der Murmeln in den Kisten keine konkrete Aussage gemacht werden, da ihr Wert voneinander abhängig ist. Dies legt die Variablenaspekte der Veränderlichen und durch die konkrete Benennung einer Beziehung die der allgemeinen Zahl nahe.

Abb.: Beispielaufgabe C1

Die Aufgabenstellung für die Aufgabe C1 lautet: „Wie viele Murmeln müssen in der orangen Kiste sein, damit beide Kinder gleichviele Murmeln haben?". Es können unterschiedliche Wertepaare angenommen und eine allgemeine Beziehung beschrieben werden.

Fallbeispiel

Die Antworten der Kinder auf die Aufgabe C1 sind von besonderem Interesse, da sie hier zum ersten Mal mit zwei voneinander abhängigen Variablen konfrontiert wurden. So geben fast alle Kindergartenkinder zunächst Zahlenwerte an, was bei den Zweitklässlern und Viertklässlern von rund 60% auf rund 40% abnimmt. Insgesamt sind rund 16% der Zweitklässler, beziehungsweise rund 42% der Viertklässler in der Lage, spontan eine Beziehung zwischen den Mengen der Murmeln in den beiden Kisten anzugeben oder die Abhängigkeit zwischen den Mengen der Murmeln zu beschreiben, ohne diese genauer zu spezifizieren. Dies gelingt keinem der untersuchten Kindergartenkinder auf Anhieb. Von besonderer Bedeutung sind an dieser Stelle die sich anschließenden teilstandardisierten Interviewnachfragen, die die Kinder dazu ermutigen, unterschiedliche Zahlenwerte anzunehmen und die mögliche Anzahl von Murmeln in den Kisten zu berücksichtigen. Dies zeigt das folgende Fallbeispiel des sechsjährigen Kindergartenkindes Vince auf die Aufgabenstellung C1:

Interviewer: „Wie viele Murmeln müssen in der grünen Kiste sein, damit beide Kinder gleich viele Murmeln haben?“

Vince: „Zwei“

Interviewer: „Wie bist du darauf gekommen?“

Vince: „Wenn eine Murmel hier liegt (*zeigt auf Annas einzelne Murmel*) und da (*zeigt auf Annas Kiste*) eine drin is, dann müssen da (*zeigt auf Tinos Kiste*) zwei drinne sein.“

(...) (Interviewer gibt verschiedene Anzahlen für Murmeln in Annas Kiste an, Vince kann die entsprechende Anzahl an Murmeln in Tinos Kiste nennen.)

Interviewer: „Und kannst du beschreiben, wie du darauf kommst, wie viele Murmeln hier in der hellgrünen Kiste sind? (*zeigt auf Tinos Kiste*)“

Vince: „Nämlich das ist nun mal...wenn die schon mal die draußen hat (*zeigt auf Annas Murmel*), dann muss man eine mehr dazu legen, bei der andren.“

Vinces Beispiel zeigt auf, dass er die Fragestellung zunächst mit einem konkreten Zahlenwert beantwortet hat. Dabei ist noch nicht eindeutig festzustellen, ob er den Zahlenwert beispielhaft oder absolut verstanden hat. Auf Nachfrage kann er jedoch beide Zahlenwerte in Beziehung setzen. Die Verwendung der Begrifflichkeiten „wenn...dann“ lässt eine beispielhafte Verwendung vermuten. Auf Nachfrage des Interviewers gelingt Vince die Annahme verschiedener Zahlenwerte. Zudem kann er die Beziehung zwischen den Anzahlen der Murmeln in beiden Kisten im Rahmen seiner sprachlichen Möglichkeiten gut beschreiben. Das von ihm genannte „eine mehr“ lässt sich in Ansätzen als Beschreibung der Relation der Mengen der Murmeln in den beiden unterschiedlich farbigen Kisten deuten.

Betrachtet man nun hierbei die möglichen Deutungen der Unbekannten entsprechend der Variablenaspekte, so ist Vince in der Lage verschiedene Werte als Inhalt der Murmeln in den Kisten anzunehmen. Dies lässt sich dem Veränderlichenaspekt von Variablen zuordnen. Vince äußert zudem: „dann muss man eine mehr dazu legen, bei der andren“. Hierbei ist anzunehmen, dass Vince erkannt hat, dass sich in der grünen Kiste eine Murmel mehr befinden muss als in der orangen Kiste. Im diesem Sinne tritt der Variablenaspekte der Unbestimmten/ allgemeinen Zahl auf.

Auf das Auswertungsschema, das es erlaubt, beide eingangs beschriebenen Konzepte in Verbindung zu bringen, kann an dieser Stelle nur verwiesen werden[1].

[1] Dies ist u.a. einzusehen in Steinweg, Akinwunmi & Lenz (2018).

Diskussion

Die Fallstudie gibt einen kleinen Einblick, dass es das Aufgabendesign erlaubt, schon Kindergartenkindern einen ersten Zugang zu unterschiedlichen Variablenaspekten und dem Herstellen von Beziehungen zwischen unbekannten Mengen zu ermöglichen. Das Aufgabendesign stellt aber auch noch für Grundschulkinder eine Herausforderung dar. Von besonderer Bedeutung sind die teilstandardisierten Interviewnachfragen zu sehen, die es den Kindern teils ermöglichen, über konkrete Deutungen der Anzahl der Murmeln in den Kisten hinwegzusehen und so die Beziehungen zwischen den Anzahlen in den Blick zu nehmen. Nach Aufforderung des Interviewers beschreiben 12% der Kinder im Kindergarten einen Zusammenhang zwischen den unbekannten Mengen und beschreiben sie als allgemeine Anzahl. Dies erhöht sich in der zweiten Klasse auf 17% und in der vierten Klasse auf 73%. Eine Schwierigkeit ist jedoch in der Einschränkung der sprachlichen Ausdruckskraft der Kinder zu sehen.

Literatur

Fujii, T., & Stephens, M. (2001). Fostering an understanding of algebraic generalisation through numerical expressions: The role of quasi-variables. In Proceedings of the 12th ICMI Study Conference: The Future of the teaching and learning of algebra (Vol. 1, pp. 258-264).

Freudenthal, H. (1973). Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 1. Stuttgart: Klett

Kieran, C. (2011). Overall commentary on early algebraization: Perspectives for research and teaching. In J.Cai & E.Knuth (Eds.), Early algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives (pp. 579–593). Berlin, Heidelberg: Springer.

Molina, M., Ambrose, R., Castro, E., & Castro, E. (2009). Breaking the addition addiction: creating the conditions for knowing-to act in early algebra. In: S. Lerman & B. Davis (Eds.), Mathematical Action & Structures Of Noticing: Studies inspired by John Mason (pp.121–134). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

Stephens, M., & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: A study of year 6 and year 7 students from Australia and China. Journal of Mathematics Education, 1(1), 28–39.

Steinweg, A., Akinwunmi, K., & Lenz, D. (2018). Making Implicit Algebraic Thinking Explicit: Exploiting National Characteristics of German Approaches. In C. Kieran (Ed.), Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5- to 12-Year Olds: The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice (pp. 283-307). Cham, CH: Springer International Publishing.