

Katja LENZ, Anika DREHER, Lars HOLZÄPFEL &  
Gerald WITTMANN, Freiburg

## **Entwicklung und Validierung eines Testinstruments zur Erfassung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen zu Brüchen**

### **Problemaufriss**

Es herrscht Konsens darüber, dass mathematisches Wissen sowohl konzeptuelles als auch prozedurales Wissen umfasst (z. B. Hiebert & LeFevre, 1986). Trotz der Vielzahl an Forschungsarbeiten zu konzeptuellem und prozeduralem Wissen bleibt die Verwendung der Begriffe zum Teil vage und es fehlen explizite domänenspezifische Konzeptualisierungen und Operationalisierungen (Crooks & Alibali, 2014). Darüber hinaus betonen Rittle-Johnson und Schneider (2015), dass der Validität bei der Messung der Wissensarten bislang zu wenig Beachtung geschenkt wurde.

### **Theoretischer Hintergrund**

*Prozedurales Wissen* über Brüche beinhaltet Wissen über die Durchführung der Rechenoperationen. Es manifestiert sich in Handlungswissen, das es ermöglicht, Aufgaben zu Brüchen rechnerisch zu lösen. Außerdem umfasst es Wissen über die Teilschritte eines Verfahrens und deren Reihenfolge (Hiebert & LeFevre, 1986; Rittle-Johnson & Schneider, 2015; Star, 2007). *Konzeptuelles Wissen* wird allgemein definiert als Wissen über Konzepte und deren Zusammenhänge, welche die Basis für das inhaltliche Verständnis eines Wissensbereichs bilden (Crooks & Alibali, 2014; Hiebert & LeFevre, 1986; Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Im Umgang mit Brüchen umfasst es sowohl Wissen darüber, was Brüche ausmacht (z. B. Grundvorstellungen zu Brüchen) als auch Wissen über die Konzepte und Prinzipien, die einer Prozedur zugrunde liegen (Crooks & Alibali, 2014).

Der Vergleich verschiedener Konzeptualisierungen und Operationalisierungen zeigt zentrale Aspekte der Wissensarten auf. Es wird aber auch deutlich, dass jeweils unterschiedliche Zugänge für die Erfassung der Wissensarten gewählt wurden und nötige Validierungsarbeit im Hinblick auf die Trennbarkeit der Wissensarten fehlt (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Da bisherige Studien hohe Korrelationen der Wissensarten im Bereich der Brüche zeigen (z.B. Hallet et al, 2010; Hecht et al. 2003), ist insbesondere zu untersuchen, ob das theoretisch angenommene zweidimensionale Modell „konzeptuell/prozedural“ oder das eindimensionale Modell für die Erklärung von Schüler\*innenleistungen angemessen ist. Weiterhin zeigen die Ergebnisse der Multitrait-Multimethod-Forschung, dass die Varianz in Testergebnissen

nicht nur durch Unterschiede in den zu messenden Konstrukten entsteht, sondern auch durch deren spezifische Operationalisierung. Wenn beispielsweise offene Testitems beantwortet werden, spiegeln die Antworten nicht nur konzeptuelles oder prozedurales Wissen zu Brüchen wider, sondern auch Wissen über fachspezifisches Vokabular oder sogar allgemeine verbale Fähigkeiten (Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Aus diesem Grund wird die alternative Modellierung „verbal/nonverbal“ untersucht.

### **Ziel und Forschungsfragen**

Im Rahmen der vorliegenden Studie wird ein Testinstrument entwickelt, das eine valide Messung von konzeptuellem und prozeduralem Wissen zu Brüchen erlaubt. Im Einzelnen werden die folgenden Forschungsfragen untersucht:

- 1) Zeigt das zweidimensionale Modell „konzeptuell/prozedural“ eine bessere Modellpassung als das eindimensionale Modell und als das zweidimensionale Modell „verbal/nonverbal“?
- 2) Können reliable Skalen für konzeptuelles und prozedurales Wissen zu Brüchen gebildet werden?
- 3) Wie hoch sind die beiden Konstrukte konzeptuelles und prozedurales Wissen zu Brüchen korreliert? Und wie korrelieren diese Konstrukte mit allgemeinen kognitiven Fähigkeiten?

### **Methodisches Vorgehen**

Die Analyse bisheriger Studien zeigte drei am häufigsten verwendete Ansätze für die Erhebung von konzeptuellem Wissen zu Brüchen: 1) Visualisierung der Anteils-Vorstellung in Übersetzungsaufgaben 2) Anwendung der Größenvorstellung zu Brüchen in Größenvergleichsaufgaben oder Zahlenstrahlaufgaben 3) Verbalisierung von Vorstellungen zu Brüchen in Erkläraufgaben (für einen Überblick siehe Rittle-Johnson & Schneider, 2015). Prozedurales Wissen zu Brüchen wurde in der Regel durch dessen Anwendung in Rechenaufgaben erfasst. In Anlehnung an deJong und Ferguson Hessler (1996) wurde davon ausgegangen, dass prozedurales Wissen explizit sein kann, weshalb es auch über die Formulierung von Handlungsanleitungen operationalisiert wurde. Gesammelte Testitems bisheriger Studien wurden gemäß der genannten Operationalisierung systematisiert und in einer Schüler\*innenbefragung ( $N = 14$ ) bezüglich ihrer Verständlichkeit und inhaltlichen Eindeutigkeit untersucht und optimiert. Anschließend wurden die Items entweder der konzeptuellen oder der prozeduralen Skala zugeordnet (Hallett et al, 2010; Faulkenberry, 2013). Diese theoretische Zuordnung wurde in einer Expert\*innenbefragung validiert ( $N = 14$ ). Kontrovers diskutierte Items wurden anschließend überarbeitet oder verworfen. Mit dem auf

diese Weise entwickelten Test wurden Daten von 235 Schüler\*innen der 8./9. Klasse aus zehn Realschulklassen in einer schriftlichen Gruppentestung erhoben. Als Kovariate wurden die allgemeinen kognitiven Fähigkeiten mit der Subskala N2 des Intelligenztests KFT 4-12+ R (Heller & Perleth, 2000) erfasst. Das theoretisch angenommene zweidimensionale Modell „konzeptuell/prozedural“ wurde mittels konfirmatorischer Faktorenanalyse untersucht. Modellvergleiche umfassten das eindimensionale Modell und das zweidimensionale Modell „verbal/nonverbal“. Weitere Analysen im Rahmen der Validierung konzentrierten sich auf die Reliabilität der Skalen sowie auf Zusammenhänge zwischen den beiden Wissensarten und den allgemeinen kognitiven Fähigkeiten.

### **Ergebnisse**

Gemäß den globalen Gütekriterien zeigte das zweidimensionale Modell „konzeptuell/prozedural“ eine gute Übereinstimmung mit den empirischen Daten ( $\chi^2 = 20.57$ ;  $df = 13$ ;  $P(\chi^2) = .08$ ;  $TLI = 0.98$ ;  $CFI = 0.98$ ;  $RMSEA = 0.05$ ;  $SRMR = 0.03$ ) und war dem eindimensionalen Modell und dem zweidimensionalen Modell „verbal/nonverbal“ hinsichtlich dieser Werte überlegen. Darüber hinaus war der BIC für dieses Modell am niedrigsten. Die BIC-Unterschiede waren größer als 10, was laut Raftery Socmeth (1995) als starker Effekt zu interpretieren ist. Die lokalen Gütemaße zeigten, dass die latenten Konstrukte konzeptuelles und prozedurales Wissen zu Brüchen zuverlässig aus ihren Indikatorvariablen geschätzt werden können. Es konnten reliable Skalen gebildet werden. Die Faktorreliabilität beider Skalen lag über dem kritischen Wert von .60 ( $F_{\text{konzeptuell}} = .77$ ;  $F_{\text{prozedural}} = .76$ ). Erwartungsgemäß waren konzeptuelles und prozedurales Wissen hoch korreliert ( $r = .79$ ,  $p < .001$ ). Weitere Hinweise auf die Trennbarkeit der Wissensarten lieferte ein Chi-Quadrat-Differenztest, der mit  $\Delta\chi^2(1, N = 235) = 29.162$ ,  $p < .01$  eine signifikante Differenz zwischen dem zweidimensionalen Modell „konzeptuell/prozedural“ und dem eindimensionalen Modell anzeigte. Darüber hinaus wurde bestätigt, dass sich die Korrelation von konzeptuellem Wissen und allgemeinen kognitiven Fähigkeiten ( $r = .447$ ,  $p < .001$ ) und die Korrelation von prozeduralem Wissen und allgemeinen kognitiven Fähigkeiten ( $r = .344$ ,  $p < .001$ ) mit Olkins  $z = -2.919$  ( $p < .005$ ) signifikant voneinander unterscheiden.

### **Ausblick**

In der vorliegenden Studie wurde ein Testinstrument entwickelt, das es ermöglicht, konzeptuelles und prozedurales Wissen zu Brüchen differenziert und valide zu erfassen. Wie Rittle-Johnson und Schneider (2015) betonten, stellt die Entwicklung und Validierung eines Testinstrumentes zur Erfassung der beiden Wissensarten einen notwendigen Schritt auf dem Weg zu einem

vertieften Verständnis der Beziehung der beiden Wissensarten dar. Das Testinstrument kann dazu eingesetzt werden, individuelle Unterschiede von Schüler\*innen in ihrem prozeduralen und konzeptuellen Wissen zu Brüchen zu ermitteln. Dies liefert Ansatzpunkte für weitere Forschung, indem das Testinstrument dazu eingesetzt werden kann, die Wirkung von differenziellen Interventionen zu evaluieren.

## Literatur

- Crooks, N. M., & Alibali, M. W. (2014): Defining and measuring conceptual knowledge in mathematics. *Developmental Review*, 34 (4), 344–377.
- de Jong, A. J. M., & Ferguson-Hessler, M. G. M. (1996). Types and qualities of knowledge. *Educational psychologist*, 31(2), 105-113.
- Faulkenberry, T. J. (2013). The conceptual/procedural distinction belongs to strategies, not tasks: a comment on Gabriel et al. (2013). *Frontiers in Psychology*, 4, 820.
- Hallett, D., Nunes, T., & Bryant, P. (2010). Individual differences in conceptual and procedural knowledge when learning fractions. *Journal of Educational Psychology*, 102, 395–406.
- Hecht, S. A., Close, L., & Santisi, M. (2003): Sources of individual differences in fraction skills. *Journal of experimental child psychology*, 86 (4), 277–302.
- Heller, K. A., & Perleth, C. (2000): *KFT 4-12+ R Cognitive Abilities Test 4–12. Manual*. Göttingen: Hogrefe.
- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986): Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.): *Conceptual and procedural knowledge. The case of mathematics*. Hillsdale NJ u.a.: Erlbaum, 1–27.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. (2015): Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201-221.
- Raftery, A. E. (1995): Bayesian Model Selection in Social Research. *Sociological Methodology*, 25, 111.
- Rittle-Johnson, B., & Schneider, M. (2015): Developing Conceptual and Procedural Knowledge of Mathematics. In R. C. Kadosh und A. Dowker (Eds.): *The Oxford handbook of numerical cognition* (pp. 1102-1118). Oxford, New York: Oxford University Press.
- Star, J. R. (2007): Foregrounding Procedural Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (2), 132–135.