Elvira MALITTE & Karin RICHTER, Halle a.d.S.

Geometrische Zusammenhänge erkunden: quadratische Räder auf einer Kreisbogen-Piste.

Die Problemstellung

Warum müssen Räder eigentlich immer rund sein? Was passiert, wenn man zu quadratischen „Rädern“ überginge, mit der Radachse durch die Quadratmittelpunkte? Diese auf den ersten Blick etwas befremdlich anmutende Frage kann den Ausgangspunkt zu einem spannenden mathematischen Lernangebot zur Geometrie ab der Jahrgangsstufe 8 bilden. Lässt man sich auf die Idee ein, auf die Achsen eines Wagens vier gleichgroße quadratische Räder zu montieren, wird schnell klar, dass die „Straße“, auf der sich das Fahrzeug bewegen soll, nicht wie gewohnt gerade sein sollte. Sonst ist starkes Holpern (= Auf und Ab der Radachsen) vorprogrammiert.

Abb.1: Mathematik zum Ausprobieren und Erkunden in der Experimente-Werkstatt Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg: Eckige Räder auf einer Halbkreisbogen-Piste.
Foto: R. Sommer (Halle)

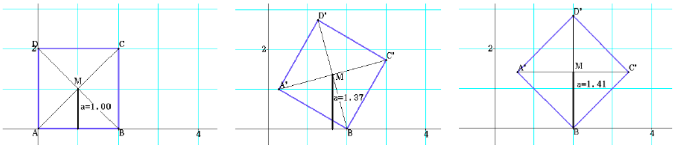

Abb. 2: Die Bildabfolge zeigt das „Abrollen“ (eigentlich „Kippen“) eines Quadrats auf einer Geraden. Der Kipppunkt ist hier der Punkt B. Gekippt wird um die Winkel -30° und -45°. Der Quadratmittelpunkt des Quadrats mit der Seitenlänge 2 steigt dabei von der Höhe 1 auf die Höhe (≈)1,41 über dem Straßenniveau an.

Eine Kreisbogen-Piste ist dem Gefährt mit Quadrat-Rädern besser angepasst.

Aber: Bringen Halbkreisbögen (wie in Abb. 3) das gewünschte ruhige Fahren? Oder ist es günstiger, andere Kreisbögen (etwa Viertelkreise) für die Piste zu nutzen? Und: Welche Kantenlänge müssen die angepassten Quadraträder besitzen? In einem offenen Lernangebot zur ebenen Geometrie soll dies näher

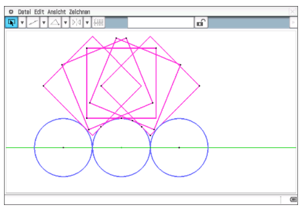

Abb. 3: Ein quadratisches Rad rollt auf einer Halbkreisbogen-Piste ab.

untersucht werden. Als Vorwissen hierfür genügen grundlegende Kenntnisse zu Kreis und Kreistangenten. Auf dieser Basis können einfache Überlegungen zu Winkelgrößen, Streckenlängen und Symmetriebeziehungen vorgenommen werden, mit deren Hilfe Interessantes über rollende eckige Räder erkundet werden kann.

Das im Vortrag vorgestellte Erkundungsprojekt „Quadrat-Räder auf Kreisbogen-Pisten" dient der vertiefenden Auseinandersetzung mit Eigenschaften von Kreistangenten und deren erkundend-aktiver Anwendung auf geometrisch einfach zu erfassende Situationen.

Mit Hilfe eines leicht selbst herstellbaren Modells kann ein Zugang zur Problematik geschaffen werden, der schnell auf die oben genannten Fragen führt und zu eigenständigem Erkunden motiviert.

Abb. 4: Papprollen-Piste (etwa aus Küchenrollen erstellt und aneinander fixiert) und abrollende Quadratscheiben (durch Schaschlikspieße verbunden)
Foto: E. Malitte (Halle)

Es bietet sich an, arbeitsteilig vorzugehen: Ein Teil der Klasse untersucht die Halbkreisbogen-Piste, die anderen Lernenden beschäftigen sich mit den Konsequenzen der Viertelkreisbogen-Piste für das Abrollen der Quadraträder. Wird zu beiden Fragstellungen jeweils in Kleingruppen gearbeitet, besteht die Möglichkeit, individuell Lösungsideen einzubringen, Lösungsalgorithmen gemeinsam zu entwickeln und an deren Erprobung zu arbeiten.

Nach der Erkundungsphase wird dann im Plenum über die gewonnenen Einsichten diskutiert, werden Ergebnisse gemeinsam festgehalten.

Die Beschäftigung mit den beiden Pistenarten erfordert neben dem eigengesteuerten Umgang der Schülerinnen und Schüler mit ihrem Wissen zu Kreistangenten auch die Veranschaulichung der zu untersuchenden geometrischen Zusammenhänge. Die Möglichkeiten erstrecken sich dabei von der Planskizze über die händische Konstruktion mit Zirkel und Lineal bis zur Nutzung geeigneter technischer Hilfsmittel. Ein grafikfähiger Taschenrechner mit Geometriemenü wie auch dynamische Geometriesoftware wie etwa Geogebra bieten sich hierfür gleichermaßen an.

Im Vortrag werden Vorschläge für die unterrichtliche Aufbereitung dieses Erkundungsprojektes vorgestellt, mögliche Einordnungen in den Geometrieunterricht diskutiert und Erfahrungen bei der Umsetzung erläutert. Die vorgestellte Lernumgebung soll exemplarisch zeigen, dass bereits niederschwellige, in weiterem Sinn auf die Lebensumwelt der Schülerinnen und

Schüler bezogene Fragestellungen zum anregenden Ausgangspunkt für alle Lernenden werden können zu kreativer, individuell geprägter Auseinandersetzung mit Mathematik.

Erkundungsauftrag A: Quadrat-Räder auf einer Halbkreisbogen-Piste

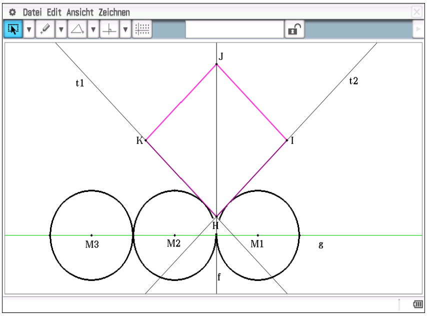

Abb. 5: Ein Quadrat-Rad auf Halbkreisbogen-Piste, auf der Spitze „stehend".

Gegeben sind gleichgroße Kreise, die einander berühren. Ihre Mittelpunkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden und zwar so, dass eine Halbkreisbogen-Piste entsteht. Gesucht ist ein Quadrat, das auf diesen Kreisen „gut abrollen" kann.

Erkundungsauftrag B: Quadrat-Räder auf einer Viertelkreisbogen-Piste

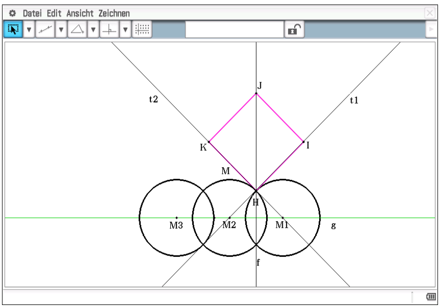

Abb. 6: Ein Quadrat-Rad auf Viertelkreisbogen-Piste, auf der Spitze „stehend".

Gegeben sind gleichgroße Kreise, die einander berühren. Ihre Mittelpunkte liegen auf einer gemeinsamen Geraden und zwar so, dass eine Viertelkreisbogen-Piste entsteht. Gesucht ist ein Quadrat, das auf diesen Kreisen „gut abrollen" kann.

Für beide Erkundungsaufträge sind die folgenden Aufgaben formuliert:

a) Die Abbildung zeigt die folgende Situation: Das (gesuchte) Quadrat liegt auf zwei einander berührenden Kreisen auf, und zwar so, dass Symmetrie bzgl. einer Senkrechten zur Kreismittelpunktsgeraden entsteht. Welche geometrischen Zusammenhänge (Winkelgrößen, Streckenlängen) könnt ihr entdecken? Begründet.

b) Nutzt die Ergebnisse aus Teilaufgabe a), um das Quadratrad in dieser besonderen Lage zu konstruieren.

c) Auf und Ab des Quadrat-Mittelpunktes beim Abrollen auf eurer Piste? Betrachtet die Abstände des Mittelpunktes des Quadrates von der Geraden durch die Kreismittelpunkte beim Abrollen. Betrachtet spezielle Lagen. Was stellt ihr fest?

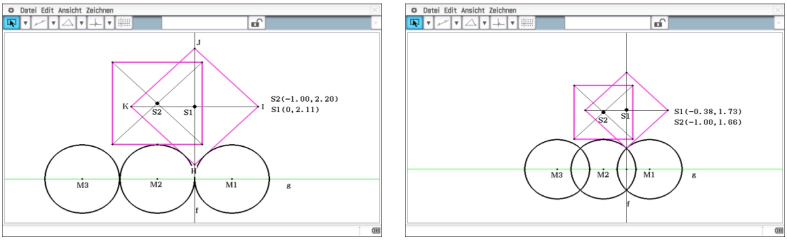

Abb. 7: Ein Quadrat-Rad auf einer Halbkreisbogen-Piste bzw. auf einer Viertelkreisbogen-Piste, jeweils in zwei besonderen Lagen.

Zusammenfassung

Die durchgeführten Erprobungen zum Lernangebot haben belegt, dass gerade durch die zielgerichtete Kontexteinbindung, gestützt durch eigenes Erkunden der Sachsituation, sich für Lernende Lernzugänge eröffnen, die den individuellen Voraussetzungen entsprechend in der (Klein-) Gruppenarbeit zu erfolgreicher Auseinandersetzung mit offenen mathematikhaltigen Problemstellungen führen. Der eigenaktive Umgang mit solch einer leicht zugänglichen Problemsituation ist für die Schülerinnen und Schüler herausfordernd und motivierend zugleich. Hierüber wird im Vortrag am Beispiel der Untersuchung von Kreisberührproblemen berichtet.

Literatur

Haftendorn, D. (2016). *Kurven erkunden und verstehen*. Berlin, Heidelberg: Springer Spektrum.

Herget, W. et al. (2001). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I*. Berlin: Cornelsen.

Pehkonen, E. (2001). Offene Probleme: Eine Methode zur Entwicklung des Mathematikunterrichts. *Der Mathematikunterricht*, 47(6), 60-72.