

## **Mathematik lernen in heterogenen Lerngruppen**

Die Resultate aus Untersuchungen zur Situation kleiner Schulen im alpinen Raum weisen auf die Schwierigkeiten der Lehrenden im Umgang mit der großen Heterogenität jahrgangsgemischter Lerngruppen hin. Häufig wird insbesondere der Mathematikunterricht jahrgangsbezogen gestaltet oder die Heterogenität mit individualisierenden Konzepten wie Frei- oder Planarbeit aufgefangen (Raggl 2015). Dieser Forschungsbefund führt zu Fragen nach der Konzeption mathematischer Lerngegenstände für gemeinsames Lernen unterschiedlicher Jahrgänge und den Auswirkungen der Heterogenität jahrgangsgemischter Lerngruppen auf individuelle Lernprozesse. In einem Educational-Design-Research-Projekt wurden Lernangebote für den jahrgangsübergreifenden Mathematikunterricht (4.-6. Schuljahr) entwickelt, erprobt und evaluiert sowie zahlreiche Partnerarbeiten videografiert und die Lernprozesse analysiert.

### **Konzeptionelle Überlegungen**

Mathematik als Wissenschaft der Muster und Strukturen (Devlin 2001) birgt ein enormes Potenzial für das Lernen in heterogenen Lerngruppen. In einem konstruktivistischen Umfeld können Lernende die Muster und deren Beziehungen untereinander auf unterschiedlichen kognitiven Niveaus erfahren und anwenden. Die Schülerinnen und Schüler entdecken und erforschen Muster in geeigneten Kontexten. Sie arbeiten durch Abstrahieren wesentliche Eigenschaften erkannter Muster heraus und entwickeln durch Verallgemeinerungsprozesse Kompetenzen zur erfolgreichen Anwendung verstandener Muster in neuen Herausforderungen (horizontal und vertikal Mathematisieren, vgl. Treffers 1987). Die Parallelisierung der Inhalte ermöglicht einen ganzheitlichen Zugang über mehrere Schuljahre. Damit wird den Lernenden das Erfassen von Strukturen erleichtert und das Potenzial für kooperatives Arbeiten wird erhöht (vgl. Scherer 1995). Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein vertieftes Verständnis der Strukturen mathematischer Teilgebiete in mehreren Durchgängen. Die Lehrenden orientieren sich für die Unterrichtsplanung im Sinne mehrjähriger Zyklen an den Mustern und Strukturen der für die Zielstufe relevanten Inhalte und somit an den fundamentalen Ideen.

Durch einen regen Austausch unter Lernenden - mit unterschiedlichen Leistungsniveaus und unterschiedlichem Vorwissen – und durch Lernen am gleichen Gegenstand kann die Heterogenität für erfolgreiche Lernprozesse

genutzt werden. Das Unterrichtskonzept legt daher starkes Gewicht auf jahrgangsgemischte Partnerarbeiten und auf Klassengespräche.

### **Hinweise zum Untersuchungsdesign**

Die Erprobung und Evaluation des Unterrichtskonzepts basiert auf dem Educational-Design-Research-Forschungsansatz (vgl. McKenney & Reeves 2012). Dieser Forschungsansatz hat einen engen Bezug zu den Auffassungen von Mathematik als Wissenschaft vielfältig vernetzter Muster und zum Verständnis von Lernen als ko-konstruktiver Prozess (vgl. Matter 2017). Soziale Interaktion und individuelle Interpretation führen auf der Basis von substanziellen Lernumgebungen zur Entwicklung von mathematischem Wissen. Aus diesem Zusammenhang wurde die Charakterisierung der Mathematikdidaktik als Design Science abgeleitet (vgl. Wittmann 1998). Eine Design Science beschäftigt sich mit dem Entwerfen, Entwickeln und Erproben von Artefakten, welche über erwünschte Eigenschaften verfügen und beabsichtigte Wirkungen erzielen. Die Artefakte in der Mathematikdidaktik sind Unterrichtskonzepte, Lernumgebungen und Curricula (vgl. ebd.). Die erhofften Wirkungen der Artefakte der Mathematikdidaktik sind interaktive Lehr- und Lernprozesse, welche den Lernenden die Konstruktion von (relationalem) mathematischem Wissen ermöglichen.

Die vorliegende Studie umfasst arithmetische Themenkomplexe (Addition/Subtraktion, Großes Einmaleins, Bruchvorstellungen u. a.) und fokussiert bei den einzelnen Interventionen unterschiedliche Aspekte wie Forschungsaufträge, flexibles Rechnen oder Aufbau von Grundvorstellungen.

### **Ausgewählte Untersuchungsergebnisse**

Ergebnisse der Untersuchung sind erprobte Lernangebote, Unterrichtsdesigns, domänenspezifische Theoriebeiträge und Erkenntnisse zur sozialen Interaktion in Partnergruppen.

Domänenspezifische Ergebnisse betreffen u. a.

- die durch die Gestaltung der Aufgaben angeregte hohe Aktivität während langen Arbeitsphasen,
- die durch das Unterrichtsdesign und die Aufgabenstellungen angeregte jahrgangsübergreifende Kooperation,
- das Erkennen von Mustern und den sich daraus ergebenden Nutzen bei der Entwicklung neuer Strategien,
- das nachhaltige Verständnis der Muster, welches zum Teil durch eine entsprechende Gestaltung der Aufgaben, ergänzende Fragestellungen

und vermehrte Austauschphasen im Klassengespräch stärker gefördert werden muss,

- das erschwerte Erkennen von Mustern, wenn Rechenfehler geschehen,
- „Denkwerkzeuge“, welche den Aufbau von Grundvorstellungen ermöglichen und durch die Lehrenden bewusst gefördert werden können,
- das wiederholte Vernetzen von Rechenregeln und –verfahren mit passenden Grundvorstellungen durch jahrgangsübergreifendes Lernen,
- die Selbstkontrolle, welche sich nicht immer von selbst einstellt.

Im Sinne von Educational-Design-Research führt die Untersuchung der Partnerarbeiten zu Vermutungen über mögliche Zusammenhänge. Daraus können Hypothesen zu den Ursachen von Lernfortschritten abgeleitet und in weiteren Forschungszyklen überprüft werden.

Die Analyse der Partnerarbeiten berücksichtigt drei Zonen der Entwicklung (Vygotskys Zonen der aktuellen und der nächsten Entwicklung sowie eine Zone der früheren Entwicklung im Sinne einer Rückschau auf frühere Lernprozesse, vgl. Nührenböcker & Pust 2011) und fokussiert Verstehensprozesse. Diese können auf der kooperativen und der individuellen Ebene erfasst werden. Entsprechend wird in der Analyse unterschieden zwischen der kommunikativen und der epistemologischen Ebene. Auf der kommunikativen Ebene wird untersucht, ob die Partnerinnen und Partner einander zu hören, Mitteilungen deuten und ob sich ein fortgesetztes Modifizieren von Bedeutungen entfaltet. Die epistemologische Ebene enthält Erkenntnisse zu Mustern, zu Abstraktions- und Verallgemeinerungsprozessen und zu Zusammenhängen zwischen den Strategien und den Strukturen der Aufgaben.

Die Analysen der Partnerarbeiten und die Ergebnisse anderer Untersuchungen lassen darauf schließen, dass fachliche und soziale Aspekte den Verlauf der Partnerarbeiten und die Verstehensprozesse beeinflussen. In einem fachlich ausgeglichenen Austausch verfügen beide Partnerinnen oder Partner über genügend mathematische Fähigkeiten, um zum Gesamtergebnis der Partnerarbeit beizutragen. Neben dem Leistungsniveau spielen dabei die domänenspezifischen Vorkenntnisse eine Rolle. In derartigen Partnerschaften entfaltet sich häufig fortschreitendes Modifizieren von Bedeutungen, auch wenn ein Schüler oder eine Schülerin in sozialer Hinsicht dominant ist. Beide entwickeln in einem kognitiv aktiven Austausch gemeinsame Lösungen und Begründungen und arbeiten weitgehend in einem Übergangsbereich der Zonen der aktuellen und der nächsten Entwicklung. Bei unterschiedlichen fachlichen Fähigkeiten ist das soziale Verhalten beider Partnerinnen oder Partner für einen Lernerfolg ausschlaggebend. Vermögen Leistungsstärkere

die Leistungsschwächeren im Austausch einzubinden und letztere bemühen sich um eine aktive Beteiligung am Austausch, so verbuchen beide einen Lernzuwachs, der eine in der Zone der früheren, der andere in derjenigen der zukünftigen Entwicklung. Gehen leistungsstärkere Schülerinnen oder Schüler ohne Rücksicht auf Leistungsschwächere schnell vorwärts und akzeptieren diese ihre Rolle, so kann kein kognitives Miteinander entstehen und die Kooperation führt nicht zu Lernfortschritten. Möglicherweise generieren stärkere Schülerinnen oder Schüler einen Wissenszuwachs in ihrer Zone der aktuellen Entwicklung.

Aus diesen Ergebnissen lassen sich Möglichkeiten zur Förderung der Wissenskonstruktion in Partnerarbeiten ableiten, welche u. a. eine geplante Gruppenzusammensetzung und lernförderliches Verhalten betreffen. Die Resultate dieser Studie haben auch Bedeutung für den Mathematikunterricht im Allgemeinen. So können beispielsweise die Folgerungen für kooperatives Arbeiten in Partnergruppen die Nutzung der Heterogenität in beliebigen heterogenen Lerngruppen fördern.

## Literatur

- Devlin, K. J. (2001). *Das Mathe-Gen oder wie sich das mathematische Denken entwickelt und warum Sie Zahlen ruhig vergessen können*. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Matter, B. (2017). Lernen in heterogenen Lerngruppen. Erprobung und Evaluation eines Konzepts für den jahrgangsgemischten Mathematikunterricht. *Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- McKenney, S. E., & Reeves, T. C. (2012): *Conducting Educational Design Research*. London: Routledge.
- Nührenböcker, M. & Pust, S. (2011): *Mit Unterschieden rechnen. Lernumgebungen und Materialien für einen differenzierten Anfangsunterricht Mathematik*. Seelze: Kallmeyer.
- Raggl, A. (2015): Umsetzung des jahrgangsgemischten Unterrichts in kleinen Schulen. In A. Raggl, R. Smit, & U. Kerle (Hrsg.), *Kleine Schulen im ländlich-alpinen Raum (S. 57-76)*. Innsbruck: Studien Verlag.
- Scherer, P. (1995): Ganzheitlicher Einstieg in neue Zahlenräume – auch für lernschwache Schüler?! In: G. N. Müller; E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen (S. 151-164)*. Frankfurt a. M.: Grundschulverband.
- Swan, M. (2006): Collaborative Learning in Mathematics. A Challenge to our Beliefs and Practices. London: NRDC, NIACE.
- Wittmann, E. C. (1998): Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. In: *Beiträge zur Lehrerbildung 16(3)*, S. 329-342.
- Treffers, A. (1987): Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – The Wiskobas Project. Dordrecht: Springer Netherlands.