Gregor MILICIC, Salzburg

Innermathematisches Experimentieren im Kontext der Modellierung mit Algorithmen

Kathleen Philipp bezeichnet die Denkprozesse beim Experimentieren mit mathematischen Objekten sowie die Hypothesenbildung und Hypothesenprüfung mit *Innermathematischem Experimentieren* (Philipp, 2012). Als Grundlage zur Beschreibung der Handlungsprozesse und Schritte beim Experimentieren dient der Experimentierkreislauf von Timo Leuders, der für Experimente mit Algorithmen adaptiert wurde und in **Abbildung 1** dargestellt ist.

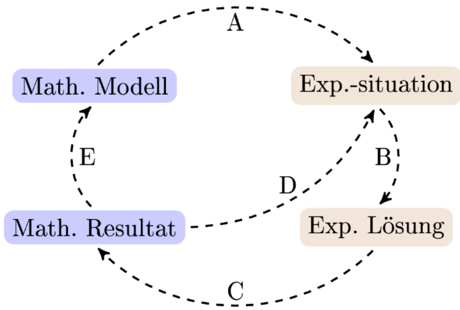

Abbildung 1: Adaptierter Experimentierkreislauf für Algorithmen auf Grundlage von Timo Leuders (Leuders, Ludwig, & Oldenburg, 2006).

Ausgehend von einem mathematischen Modell wird die Experimentalsituation geplant, indem ein geeignetes Beispiel ausgesucht wird, welches der Demonstration, der Hypothesenprüfung oder der Erkundung des Phänomenbereichs dienen kann (Pfeil A). Es folgt die Durchführung des Experiments, mit B beschriftet, der jeweilige Algorithmus wird auf das Beispiel angewendet mit dem Resultat der experimentellen Lösung. Anhand von verschiedenen Kennzahlen wird diese Lösung abgeglichen und validiert (Pfeil C). Bei Bedarf wird anschließend das Experiment angepasst, indem z.B. ein anderes Beispiel betrachtet wird oder Änderungen am Algorithmus vorgenommen werden (Pfeil D). Diente das Experiment der Erkundung des Phänomenbereichs und wurde bisher Unbekanntes beobachtet, wird das mathematische Modell untersucht (E). Falls die exakte Lösung des betrachteten Problems bekannt ist, kann der Fehler zwischen der Experimentallösung und der analytischen Lösung ermittelt werden. Ansonsten können andere Kennzahlen, wie z.B. eine Fehlerschätzung, die maximale Anzahl an Iterationen oder auch der Aufwand bei der Durchführung des Verfahrens, zur Bewertung des

Verfahrens verwendet werden. Abschließend wird meist eine weitere Optimierung des Verfahrens angestrebt oder bestimmte Einflüsse von Parametern untersucht. Wird Unbekanntes und Unerwartetes beobachtet, wird eine Untersuchung des mathematischen Modells vorgenommen.

Die verwendeten Begriffe *Mathematisches Modell* und *Mathematisches Resultat* verdeutlichen bereits den Zusammenhang zur Modellierung. Die Modellierung motiviert die Entwicklung und Verbesserung von Algorithmen zur Lösung von Anwendungsproblemen. Bevor jedoch die Algorithmen für konkrete Anwendungen genutzt werden können, müssen die Verfahren in Experimenten bezüglich ihrer Eigenschaften (Konvergenz, Effizienz und Genauigkeit) geprüft und untersucht werden. Diese zur Validierung der Verfahren genutzte Kennzahl (Pfeil C) ist somit wiederum abhängig von der jeweils modellierten Anwendung. Der entsprechende Zusammenhang ist in **Abbildung 2** dargestellt.

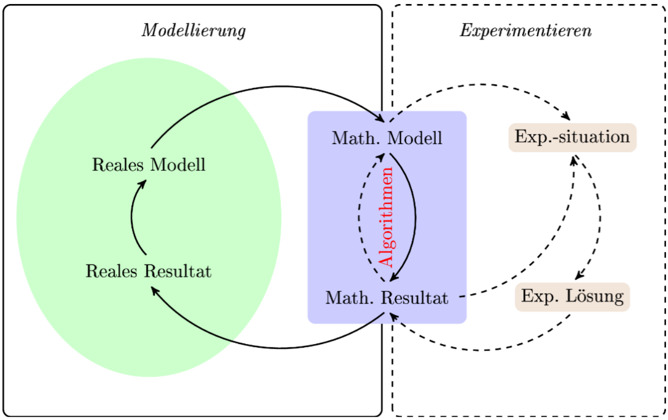

Abbildung 2: Modellierungs- und Experimentierkreislauf für Algorithmen.

Neben der Untersuchung ist auch der Vergleich der Verfahren miteinander in Experimenten ein wesentlicher Aspekt der Arbeit mit Algorithmen und kann ein interessanter Gegenstand im Unterricht sein. Für reale Anwendungen gibt es selten das eine „richtige“ Verfahren. In Abhängigkeit von den Eingangsdaten und der geforderten Anwendung muss teilweise immer wieder neu entschieden werden. Als Beispiel können Lösungsverfahren zur Nullstellensuche oder auch Zeitschrittverfahren für Gewöhnliche Differentialgleichungen angeführt werden.

Zudem können verschiedene Wahlsysteme als mathematische Algorithmen angesehen und miteinander verglichen werden. Auf das mathematische Modell etwa der Auflistung der Stimmen pro Wahlbezirk, werden die verschiedenen Wahlverfahren angewendet, um die Sitzverteilung zu erhalten. Um die Eigenschaften der Wahlsysteme zu erforschen, können in Experimentalsituationen beispielhafte Stimmverteilungen angenommen und die Wahlverfahren darauf angewendet werden. Anschließend können die Experimentallösungen, die jeweiligen Sitzverteilungen, miteinander verglichen werden.

Gerade die geschichtliche Entwicklung der Mathematik und ihrer Forschungsgebiete lässt sich anhand der Verfahrensvergleiche auch gut darstellen und vermitteln. Als Beispiel können iterative Löser für Lineare Gleichungssysteme angeführt werden (Milicic G. , 2016). Basierend auf dem einfachen Jacobi-Verfahren (benannt nach Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 – 1851) kann durch eine kleine Änderung im Algorithmus das schneller konvergierende Gauß-Seidel-Verfahren (1874 publiziert) eingeführt werden. Wird zudem ein Parameter $\omega \in (0,2)$ genutzt, erhält man das SOR-Verfahren. Als aktuelle Methoden würden sich CG-Verfahren anschließen.

Zur Identifikation weiterer Algorithmen in der Schnittmenge zwischen den Konzepten der Modellierung und des Experimentierens lohnt sich ein Blick in die Numerik, deren Gegenstand Berthold Schuppar und Johann Humenberger (Schuppar & Humenberger, 2015) wie folgt beschreiben:

> *Das Ziel der professionellen Numerik ist, grob gesagt, die Entwicklung und theoretische Analyse von Algorithmen zum Lösen von (Anwendungs-)Problemen mittels Computern.*

Viele während der Modellierung erhaltene mathematische Modelle sind nicht analytisch lösbar. Numerische Verfahren können und müssen eingesetzt werden, um eine Näherungslösung zu erhalten.

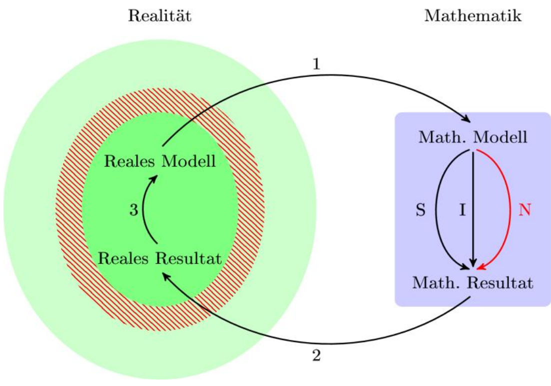

Abbildung 3: Modellierungskreislauf (Milicic G. , 2019) ergänzt um die Numerische Sichtweise.

Die Numerik als mathematisches Teilgebiet vermag es daher, die beiden Prozesse der Modellierung und des Experimentierens zusammenzuführen und zu verbinden. Die Numerik kann damit zur Erweiterung der behandelbaren Problemstellungen der realen Welt eingeführt werden, als weiteres Werkzeug zur Lösung von einer größeren Problemklasse neben der ikonischen oder symbolischen Bearbeitung innerhalb der Mathematik (Fuchs & Kraler, 2018). Wie in Abbildung 3 grafisch darstellt kann mittels numerischer Verfahren die größere, um die schraffierte Fläche erweiterte Problemklasse der realen Welt bearbeitet werden.

Folgt man dieser Auffassung, so ist die Numerik keine eigenständige Disziplin, vielmehr wird die Numerik als Werkzeug zur Problemlösung in den verschiedenen mathematischen Themengebieten eingesetzt.

Literatur

Fuchs, K., & Kraler, C. (2018). Sinn und Nachhaltigkeit als Themen der Mathematikdidaktik - Aufgabendidaktische Überlegungen zu einem bekannten Beispiel. Vortrag auf der gemeinsamen Jahrestagung GDM und DMV 2018, Paderborn.

Leuders, T., Ludwig, M., & Oldenburg, R. (2006). Experimentieren im Geometriunterricht. Herbsttagung 2006 des GDM-Arbeitskreises Geometrie. Von https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/docs/Oldenburg_Experimente.pdf abgerufen.

Milicic, G. (2016). Iterative Löser für Lineare Gleichungssysteme. *Mathematik im Unterricht*, 13-16.

Milicic, G. (2019). Lösungsalgorithmen für Variationsungleichungen und gekoppelte Systeme im Wissenstransfer zwischen Forschung und Schule. Dissertation an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Salzburg.

Philipp, K. (2012). *Experimentelles Denken: Theoretische und empirische Konkretisierung einer mathematischen Kompetenz.* Springer Fachmedien Wiesbaden. Springer Spektrum. Von https://books.google.at/books?id=3DG75NbUBYC abgerufen.

Schuppar, B., & Humenberger, H. (2015). *Elementare Numerik für die Sekundarstufe.* Springer Berlin Heidelberg. Springer Spektrum.