Katharina MROS, Essen

‚2 4er-Boote = 1 8er-Boot' – Semiotische und epistemologische Perspektiven auf Zeichnungen einer Viertklässlerin zu Textaufgaben

Anknüpfend an den BzMU-Beitrag (vgl. Mros 2018, Projekt AuS-ReDen), in dem erste Charakteristika von drei epistemologischen Deutungsebenen zu Sachaufgaben vorgestellt wurden, werden hier die beiden schon verwendeten Zeichnungen von Emilia erneut aufgegriffen, um sie detailliert aus semiotischer und epistemologischer Perspektive zu analysieren. Gemäß den besonderen Anforderungen für qualitative mathematikdidaktische Forschungen werden die Zeichnungen interpretiert und so eine Entwicklung von der ‚Welt der Dinge' hin zur ‚Welt der mathematischen Beziehungen' rekonstruiert.

Epistemologische Natur mathematischen Wissens

Für Hersh (1998, 13-14) sind mathematische Objekte real existierend und bedeutungsvoll, aber ihre Existenz ist weder als materiell („matter") noch als mental („mind") aufzufassen. Mathematik hat eine *soziale Existenz*, in der mathematische Konzepte als reale Konzepte Bestandteil des geteilten Denkens von Mathematikern sind. Die natürliche Zahl ‚fünf' fungiert einmal als Adjektiv, wenn darauf verwiesen wird, dass ein Mensch fünf Finger an seiner linken Hand hat. Die Zahl ‚fünf' erhält so einen vergleichbaren Status wie Beschreibungen anderer individueller Eigenschaften einer Hand (lange/kurze Finger, breite/schmale Handfläche etc.). In der Mathematik bedeutet ‚fünf' aber mehr und anderes als diese physikalische, empirische Eigenschaft; ihre Bedeutung liegt in den *Relationen*, die die Zahl ‚5' in der Zahlentheorie einnimmt. ‚Fünf' ist hier ein Element in einer systemisch-relationalen Struktur mit unendlich vielen Beziehungen zu den anderen Elementen dieses Systems. Benacerraf (1984, 290ff) betont, dass es nicht um individuelle dingliche Eigenschaften von Elementen einer gewählten Menge (wie beispielsweise Finger und ihre Individualität) geht, sondern dass die allen gemeinsamen, zugrundeliegenden Beziehungen zueinander entscheidend sind. Folglich sind Zahlen keine Dinge oder Eigenschaften, sie sind *keine materiellen Objekte* in dem Sinne, dass man sie sinnlich wahrnehmen könnte, dennoch *existieren* sie als sozial geteilte Konstrukte. Ihre Existenz und Bedeutung erhalten sie – im Zahlsystem – durch ihre Beziehungen zu den anderen Zahlen als Element einer *systemischen Beziehung*. 5 ist nichts anderes, als Nachfolger von 4 und Vorgänger von 6 zu sein (vgl. Benacerraf 1984, 291). Um Zugang zu den ‚nicht direkt sinnlich wahrnehmbaren' mathematischen Objekten als *begrifflichen, mathematischen Beziehungen* zu erhalten, sind nach Duvals „cognitive paradox of access to knowledge objects“ (2006, 106) semiotische Repräsentationen *notwendig*. Die notwendigen semiotischen Mittel dürfen aber nicht mit den mathematischen Begriffen identifiziert werden. Was sind Charakteristika einer solchen semiotischen *Mediation* zwischen Zeichenträger (Repräsentation, Zeichen, Symbol) und Objekt (Referenzkontext) im Rahmen mathematischen Wissens? In der epistemologischen Sichtweise auf mathematische Lehr-Lernprozesse wird davon ausgegangen, dass die sichtbaren, *frei wählbaren*, *notwendigen* Zeichenträger durch die Deutung eines epistemischen Subjekts potenziell auf ein System ‚nicht direkt sinnlich wahrnehmbarer’ (durch die Textaufgabe *festgelegter*, verbindlicher) mathematischer Beziehungen (als begrifflicher Bedeutungskern) verweisen. Für solche Deutungen und somit Erklärung des fraglichen (bzw. teilweise in Frage stehenden) Zeichenträgers kann das Subjekt verschiedene Referenzkontexte heranziehen, die in (interaktiven) Entwicklungsprozessen wiederum (in Aspekten) fraglich gemacht und somit gewechselt bzw. ausgetauscht werden können. Die Mediation zwischen Zeichen(trägern) und Referenzkontexten vollzieht sich im Rahmen mathematischen Wissens letztlich zwischen semiotischen Mitteln auf beiden Seiten, und damit zwischen (‚nicht direkt sinnlich wahrnehmbaren‘) systemisch-relationalen Strukturen. Die Zeichenträger und gewählten Referenzkontexte entwickeln sich in *wechselweisem* Bezug zueinander als Beziehung einer mathematischen begrifflichen Idee. Die weitere Ausdifferenzierung dieser semiotischen Mediation ist Kern der *Dynamik der mathematischen Begriffsentwicklung* und -verallgemeinerung. In Analysen im Kontext des Lernens und Verstehens müssen diese hier (nur kurz) dargestellten epistemologischen Besonderheiten mathematischen Wissens und die besonderen Bedingungen der Mediation Berücksichtigung finden, wie es beispielsweise das epistemologische Dreieck nach Steinbring (z.B. 2005, 22) tut. (Eine ausführliche Darstellung und Erklärung des Dreiecks ist hier nicht möglich.)

Von der ‚Welt der Dinge‘ zur ‚Welt der mathematischen Beziehungen‘ – Analyse zweier Zeichnungen zum Aufgabenkontext ‚Boote’

Die Deutung einer sachbezogenen Textaufgabe (Kontext ‚Boote’), die Emilia aus ihrer *Alltagssicht* entwickelt und erläutert, kann unter *allgemeiner semiotischer Perspektive* wie folgt charakterisiert werden:

"b) Eine Schule macht mit ihren Schülerinnen und Schülern einen Ausflug an den schönen Essener Baldeneysee. Das Wetter ist sehr sonnig und deshalb möchten die Schüler auf Ruderbooten den See erkunden. Es gibt kleine Boote für jeweils 4 Kinder und große Boote für jeweils 8 Kinder. Die Lehrerin bucht 5 große und 6 kleine Boote.
- Wie viele Kinder fahren in den kleinen Booten?
- Wie viele Kinder fahren in den großen Booten?
- Wie viele Kinder nehmen insgesamt am Ausflug teil?"

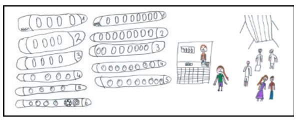

Abb. 1: Semiotische Perspektive

In der Erläuterung ihrer Zeichnung fokussiert Emilia auf die ihr wichtigen Merkmale in der von ihr aus dem Text heraus imaginierten, konkreten Situation des Sees (Kinder, Boote, Steg, Kasse, Verkäufer, Lehrerin). Die so dargestellten Gegebenheiten werden mit individuellen (dinglichen) Eigenschaften ausgestattet: Die Boote erhalten eine längliche Form, mit Kullern als Sitzplätze in einer spezifischen Anordnung, sie sind durchnummeriert, es ist vorne Platz für die Füße und eines enthält sogar einen Rettungsring und ein Seil. Das Dargestellte ist im Wesentlichen eine reale, wenn auch imaginierte, Situation, mit (potenziell) realen Objekten und empirischen Eigenschaften. Erste mathematische Aspekte von Zahl bzw. Anzahl (der Boote und Sitzplätze) spielen in der vorliegenden Zeichnung eine eher untergeordnete Rolle (erst in der weiteren Bearbeitung richtet sich der Fokus verstärkt auf die Zahlen und ihren Zusammenhang).

Die hier vorgestellte semiotische Interpretation entspricht in wesentlichen Zügen einer Kennzeichnung, wie sie auch von Forschern aus der Semiotik vorgenommen werden könnte. So unterscheidet Blanke (1998) zwischen *Dargestelltem* (hier: die von Emilia imaginierte Sachsituation des Baldeneysees mit vorhanden und hinzugefügten realen Objekten der Wirklichkeit), dem *Zeichenträger* (oder *Ikon*) (hier: das von Emilia gezeichnete Bild) und dem *Typ* (hier: die wesentlichen und charakterisierenden Merkmale und Vorkommnisse in einer See-, Boote- und Schulkinder-Situation). Der *Zeichenträger* / das *Ikon* spricht nicht für sich selbst, es bedarf des *Dargestellten* (der Sachaufgabe) als Referenz und zugleich reguliert der *Typ* die Beziehung zwischen *Zeichenträger* und *Dargestelltem*; im fortschreitenden semiotischen Prozess werden Merkmale des *Typs* zunehmend ausdifferenziert.

In der weiteren Bearbeitung (Teilaufgabe f)) konstruiert und erläutert Emilia ihre zeichnerische Darstellung, die unter *epistemologischer Perspektive* wie folgt charakterisiert werden kann: Jetzt sind nicht die jeweiligen Anzahlen der großen und kleinen Boote vorgegeben, sondern die Gesamtanzahl der Boote (12) und Kinder (68). Emilia erstellt dafür eine gänzlich andere Repräsentation, die sich aus 68 blauen und anschließend hinzugefügten roten Strichen (nach vier bzw. acht blauen) zusammensetzt.

"f) Eine Schule macht mit ihren 68 Schülerinnen und Schülern einen Ausflug an den schönen Essener Baldeneysee. Das Wetter ist sehr sonnig und deshalb möchten die Schüler auf Ruderbooten den See erkunden. Es gibt kleine Boote für jeweils 4 Kinder und große Boote für jeweils 8 Kinder. Die Lehrerin möchte 12 Boote so buchen, dass jedes Kind einen Platz bekommt.
- Wie viele kleine Boote muss sie buchen?
- Wie viele große Boote muss sie buchen?"

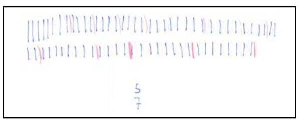

Abb. 2: Epistemologische Perspektive

Im Gegensatz zur detaillierten Zeichnung der Bootssituation (Aufgabe b)) werden nun die mathematisch irrelevanten konkreten Sachelemente und dinglichen Eigenschaften umgedeutet. Die zuvor bildhaft dargestellten Boote werden auf Anzahlen von Strichen reduziert. Diese Zeichenelemente können nun auch operativ für eine Variation der Aufgabenbedingungen genutzt werden. Ausgehend von und im Wechselspiel mit den Sachelementen der Aufgabenstellung erstellt Emilia einen komplexen Striche-Zeichenträger, der die potenzielle systemische Struktur von Zahlen und Größen intendiert. Metonymische Sprechweisen verweisen auf diese ‚nicht direkt sinnlich zugänglichen' Elemente des Systems. So hat die Gleichung ‚2 4er-Boote = 1 8er Boot' in der realen Sachsituation keine Geltung, sondern nur in der systemischen mathematischen Struktur. In Emilias Darstellung werden die dinglichen Elemente der Sachsituation (Kinder, Boote) letztlich zu abstrakten Entitäten von Anzahlträgern. Aus epistemologischer Sicht wird die Kombination der Striche mit der farblichen Trennung in 4er und 8er Bündel und der Möglichkeit, operative Änderungen vorzunehmen (2 4er-Boote = 1 8er-Boot durch Hinzufügen/Wegradieren eines roten Strichs), zu einem komplexen Zeichenträger für eine systemische Struktur.

Emilias Deutungs- und Veränderungsprozess bei der Konstruktion ihres Striche-Zeichenträgers entspricht dem, wie Rotman eine semiotische mathematische Praxis charakterisiert. „ … Those things that are ‚described' – thoughts, signifieds, notions – and the means by which they are described – scribbles – are mutually constitutive: each causes the presence of the other; so that mathematicians at the same time think their scribbles and scribble their thoughts" (Rotman 2000, 34f).

Literatur

Benacerraf, P. (1984). What numbers could not be. In P. Benacerraf & H. Putnam (Hrsg.), Philosophy of Mathematics: Selected Readings. Cambridge: Cambridge University Press, 272-294.

Blanke, B. (1998). Modelle des ikonischen Zeichens. Zeitschrift für Semiotik 20, 3-4. Stauffenburg Verlag Tübingen, 285-303.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational Studies in Mathematics, 61, 103-131.

Hersh, R. (1998). What is mathematics, really? DMV Mitteilungen, 2, 13-14.

Mros, K. (2018). Das Wechselspiel von Anwendungs- und Strukturorientierung im Mathematikunterricht der Grundschule – Interpretative Rekonstruktion epistemologischer Deutungsanforderungen. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM-Verlag, 1271-1274.

Rotman, B. (2000). Mathematics as Sign: writing, imaging, counting. Stanford, California: Stanford University Press.

Steinbring, H. (2005). The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective. New York: Springer.