

## Geometrische Experimente mit überraschenden Ergebnissen

Ausgewählte Beispiele sollen zeigen, wie Schülerinnen und Schüler (und Lehrende!) durch kreatives Experimentieren mit einem DGS Zugänge zu neuen geometrischen Phänomenen finden und neue Einsichten über bekannte geometrische Objekte gewinnen können. Bereits kleine spielerische Variationen elementargeometrischer Routineaufgaben können zu spannenden Fragen mit verblüffenden Ergebnissen führen. Die Beschäftigung mit nicht routinemäßigen, ergebnisoffenen Fragestellungen eröffnet auch dem Lehrenden Möglichkeiten, die eigene Professionalität weiterzuentwickeln und den Lernenden Einblicke in die „Werkstatt Mathematik“ zu geben. Von Polya stammt der Satz „Nobody can give away what he has not got“.

### 1. Der Inkreismittelpunkt

Die Grundseite  $\overline{AB}$  eines Dreiecks  $ABC$  sei fest vorgegeben. Für jedes Dreieck  $ABC$  gibt es dann einen Inkreis und einen Inkreismittelpunkt  $I$ .

Die Frage lautet nun: *Wo liegen die Inkreismittelpunkte  $I$ , wenn der Dreieckspunkt  $C$  außerhalb der Geraden  $AB$  beliebig gewählt wird?*

Erste Experimente führen zur überraschenden Entdeckung, dass die Inkreismittelpunkte in einem begrenzten Gebiet liegen. Dabei scheint die „Begrenzungskurve“ von ellipsenförmiger Gestalt zu sein (Abb. 1).

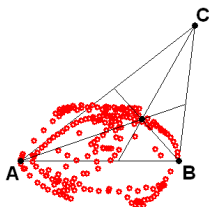


Abb. 1

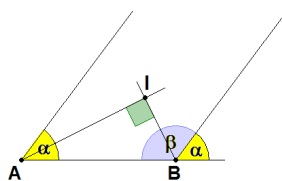


Abb. 2

Zur genaueren Analyse betrachten wir den „Grenzfall“ bei dem der Dreieckspunkt  $C$  „unendlich weit“ von der Grundseite entfernt liegt. Dann werden die beiden „Dreiecksseiten“  $a$  und  $b$  parallel zueinander verlaufen (Abb. 2) und die beiden „Dreieckswinkel“  $\alpha$  und  $\beta$  würden zusammen  $180^\circ$  ergeben. Folglich würden die von den Winkelhalbierenden  $w_\alpha$  und  $w_\beta$  und der Grundseite  $\overline{AB}$  eingeschlossenen Winkel zusammen  $90^\circ$  ergeben. Insgesamt wäre dann der Winkel bei  $I$  ebenfalls ein rechter und der Inkreismittelpunkt würde bei diesem Grenzfall auf dem *Thaleskreis* über  $\overline{AB}$  liegen!

Für alle „echten“ Dreiecke  $ABC$  liegen daher die Inkreismitelpunkte stets innerhalb des Thaleskreises über  $\overline{AB}$ . Die Bewegung des Punktes  $C$  hat einen durch Neugier motivierten Erkundungsprozess eingeleitet und einen Zusammenhang zwischen zwei wichtigen Kreisen der Schulgeometrie aufgedeckt!

## 2. Die Schatzinsel

Auf einer alten Schatzkarte ist eine Insel mit einem Galgen  $G$ , einer Palme  $P$  und einem Felsen  $F$  abgebildet (Abb. 3) und die Lage eines vergrabenen Schatzes beschrieben: „Gehe vom Galgen direkt zur Palme, zähle dabei die Anzahl der Schritte, drehe dich bei der Palme um  $90^\circ$  nach rechts, gehe die gleiche Anzahl an Schritten weiter und markiere diese Stelle mit einem Holzpfehl. Kehre zum Galgen zurück, gehe auf direktem Wege zum Felsen, drehe dich beim Felsen um  $90^\circ$  nach links, gehe die gleiche Anzahl an Schritten weiter und schlage einen zweiten Holzpfehl in den Boden. Der Schatz ist genau in der Mitte der beiden Pfehle vergraben.“

Der Entdecker der Schatzkarte startet eine Expedition zur Schatzinsel und findet die Palme und den Felsbrocken. Der Galgen ist aber spurlos verschwunden. Wie findet er den Schatz, ohne die ganze Insel umzugraben?

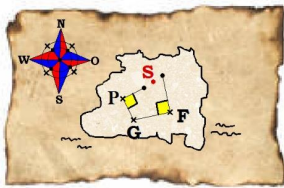


Abb. 3

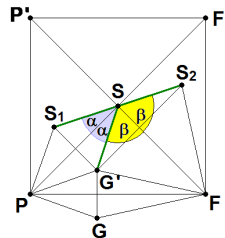


Abb. 4

### Ein Lösungsbeispiel

Experimente zeigen, dass die Lage des Schatzes  $S$  unabhängig von der Position des Galgens ist und dass der Schatz vermutlich in der Mitte des durch die Strecke  $\overline{PF}$  erzeugten Quadrates  $PFF'P'$  liegt (Abb. 4).

Der folgende elementargeometrische Nachweis bestätigt diese Vermutung. Die Position von „Pfehl“  $S_1$  wird durch eine Achsenspiegelung von  $G$  an  $\overline{PF}$  und durch eine anschließende Achsenspiegelung an der Diagonalen  $\overline{PF'}$  erreicht. Da die Spiegelachsen einen Winkel von  $45^\circ$  einschließen, stellt diese Hintereinanderschaltung eine Drehung von  $90^\circ$  um  $P$  dar.  $S_2$  ergibt sich entsprechend. Es folgt  $|S_1S| = |G'S| = |S_2S|$  und  $\angle S_1SS_2 = 2\alpha + 2\beta$ . Da sich

die Diagonalen des Quadrats rechtwinklig schneiden, liegt  $S$  tatsächlich im Schnittpunkt der Diagonalen und in der Mitte der Strecke  $S_1S_2$ .

### Eine Variation des Schatzplans

Nach den Drehungen bei  $P$  und  $F$  sind nicht mehr die alten Weglängen  $|\overline{GP}|$  und  $|\overline{GF}|$ , sondern die (vertauschten) Weglängen  $|\overline{GF}|$  und  $|\overline{GP}|$  zurückzulegen (Abb. 5a, b). Hierfür sind zunächst die Schrittzahlen von  $G$  nach  $P$  und von  $G$  nach  $F$  zu zählen. Der Schatz ist wieder genau in der Mitte der Pfähle vergraben. Wie findet man jetzt den Schatz, wenn der Galgen verschwunden ist?

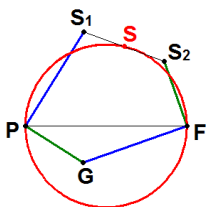


Abb. 5a

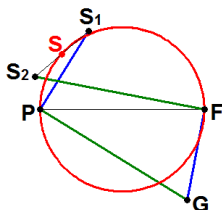


Abb. 5b

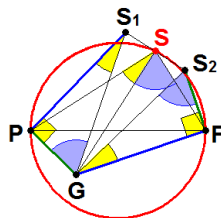


Abb. 5c

In diesem Fall hängt die Lage des Schatzes von der Position des Galgens ab: Der Schatz kann aber nur auf dem Thaleskreis über  $\overline{PF}$  liegen (Abb. 5).

Wir skizzieren einen Nachweis für die Ortskurve des Schatzes (Abb. 5c): Die rechtwinkligen Dreiecke  $PGS_1$  und  $GFS_2$  sind kongruent und der Winkel  $\angle GSS_2$  beträgt  $90^\circ$ . Die Vierecke  $PGSS_1$  und  $GFS_2S$  sind also Sehnenvierecke. Aus dem Umfangswinkelsatz folgt  $\angle PS_1G = \angle PSG$  und  $\angle GSF = \angle GS_2F$ . Die Winkel  $\angle PS_1G$  und  $\angle GS_2F$  ergeben zusammen einen rechten Winkel. Daher ist auch  $\angle PSF$  ein rechter Winkel und nach der Umkehrung des Satzes von Thales liegt  $S$  auf dem Thaleskreis über  $\overline{PF}$ .

### 3. Entdeckungen an einer der Parabel

Gegeben sei eine Parabel mit der Gleichung  $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$  (Abb. 6a). Auf der  $y$ -Achse befindet sich der Punkt  $Q(0|6,5)$ . Dieser Punkt hat zu jedem Parabelpunkt  $P(x|y)$  eine ganz bestimmte Distanz  $d$ . Wir tragen  $d$  vom Punkt  $Z(x|0)$  aus in  $y$ -Richtung ab und erhalten die Strecke  $\overline{ZP'}$  mit  $|\overline{ZP'}| = d$ .

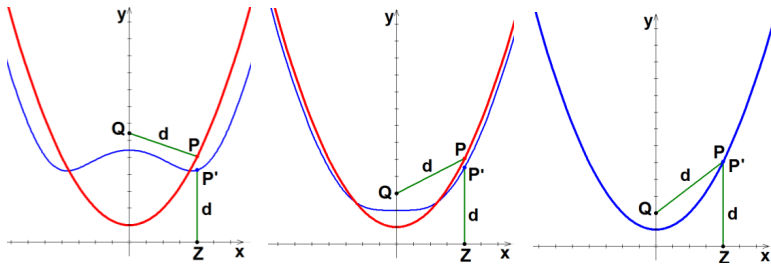


Abb. 6a

Abb. 6b

Abb. 6c

Bewegt sich  $Z$  auf der  $x$ -Achse, so entsteht eine Distanzkurve mit drei relativen Extremstellen. Wird nun  $Q$  auf der  $y$ -Achse weiter nach unten verschoben, so verändert sich die Form der Distanzkurve: Die Extrempunkte sind weniger stark ausgeprägt. Nimmt die  $y$ -Koordinate den Wert  $y = 3$  an, so sind die Funktionswerte der Distanzfunktion in der Umgebung von  $x = 0$  praktisch konstant! Die Extrempunkte „verschmelzen“ und die Distanzkurve schmiegt sich eng an die Parabel an (Abb. 6b). Rückt  $Q$  noch weiter nach unten auf den Punkt  $Q(0|2)$  zu, so stimmt die Distanzkurve offenbar mit der Parabel vollständig überein (Abb. 6c).

Ein Schnittpunkt der Distanzkurve mit der Parabel hat offensichtlich vom Punkt  $Q$  den gleichen Abstand wie zur  $x$ -Achse. Stimmt nun die Distanzkurve mit der Ausgangsparabel vollständig überein, so hat *jeder* Punkt der Ausgangsparabel von  $Q(0|2)$  den gleichen Abstand wie zur  $x$ -Achse. Damit haben wir die **Brennpunkt-Leitlinien-Eigenschaft** der Parabel entdeckt!  $Q(0|2)$  ist der **Brennpunkt** der Ausgangsparabel und die  $x$ -Achse stellt hier die **Leitlinie** dar.  $Q(0|3)$  ist der Krümmungsmittelpunkt des Scheitelpunktes der Parabel. Er hat daher von den Parabelpunkten in einer (kleinen) Umgebung von  $x = 0$  näherungsweise den gleichen Abstand.

## Literatur

- Hischer, H. (2002). *Mathematikunterricht und Neue Medien*. Hildesheim: Franzbecker.
- Müller-Sommer, H. (2008). Das Baustoff-Bauplan-Prinzip. Ein heuristisches Werkzeug für kreatives Lernen im Geometrieunterricht. *Praxis der Mathematik in der Schule*, H. 19 (S. 27–32).
- Schupp, H. (2002). *Thema mit Variationen. Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.