Marianne NACK, Alexander WOLFF & Boris GIRNAT, Hildesheim

Zum Einfluss eines strukturalen Termverständnisses auf das Lösen linearer Gleichungen

Ziel der vorliegenden empirischen Studie ist es, zu untersuchen, welchen Einfluss ein strukturales Vorwissen und Verständnis arithmetischer und algebraischer Ausdrücke auf die Kompetenz des Lösens linearer Gleichungen hat. Dabei wurde ein Leistungstest entwickelt, bestehend aus 40 Items zu 6 Itemgruppen. Abgefragt werden verschiedene Kompetenzen zum Umgang mit arithmetischen und algebraischen Termen sowie mit linearen Gleichungen. Nach aktuellem Stand haben über 460 SuS (circa 2/3 der angesetzten Stichprobe) verschiedener Schultypen und Schuljahrgänge teilgenommen. Aus Platzgründen wird in diesem Text vor allem das Design und der theoretische Hintergrund der Studie vorgestellt. Im Vortrag werden Ergebnisse präsentiert.

1. Theoretischer Hintergrund

Während viele bisherige Studien dem Verständnis des Gleichheitszeichens eine tragende Rolle beim Übergang von der Arithmetik zur Algebra und somit zum späteren Gleichungslösen zuschreiben (siehe z. B. Knuth et al., 2006, S. 297; McNeil & Alibali, 2005), verfolgt die vorliegende Studie den Ansatz, das Verständnis arithmetischer und algebraischer Rechenterme als zentralen Vorwissensfaktor in den Blick zu nehmen. Dieser Ansatz gründet sich auf die Theorie der Entwicklung mathematischer Begriffe nach Sfard (1991). Dieser Theorie zufolge lassen sich mathematische Begriffe nicht nur auf zwei verschiedene Weisen, nämlich operational und struktural, wahrnehmen und verstehen, sondern vielmehr stehen diese zudem ontologisch zueinander in Beziehung. Ein strukturales Verständnis liege dabei vor, wenn mathematische Begriffe statisch als Gegenstand betrachtet werden können und ihre zugrundeliegende Idee erkannt wird. Ein operationales Verständnis hingegen charakterisiert Sfard als prozesshaft, dynamisch und algorithmisch. Dabei nimmt sie die Auffassung an, dass ein operationales Verständnis einem strukturalen Verständnis in der Entwicklungsgenese vorausgehe, und zwar durch die Schritte: Verinnerlichung, Verdichtung und Verdinglichung (vgl. Sfard, 1991, S. 32). Beide Vorstellungen seien jedoch für das Anwenden und dem Umgang mit mathematischen Begriffen von Relevanz und Notwendigkeit (vgl. ebd.). Dabei wird in der Konzeption der vorliegenden Studie nicht nur davon ausgegangen, dass ein strukturales Verständnis eine alleinige Wirkung auf das Lösen linearere Gleichung hat. Vielmehr wird Sfards Modell mit den verschiedenen Stufen der Begriffsentwicklung als weitere Hintergrundvariablen betrachtet.

Es wird somit von der Theorie von Sfard ausgegangen und auf den vorliegenden Untersuchungsgegenstand angepasst, um den Einfluss operational und struktural beschreibbarer Kompetenzen auf das Lösen linearer Gleichungen zu untersuchen. Ergänzend wird von der Hypothese von Knuth et al. (2006) ausgegangen, dass ein strukturales Verständnis einen positiven Einfluss auf Lösen von linearen Gleichungen habe und nicht mit fortschreitender Klassenstufe zunehme. Im Gegensatz zu Knuth et al. wird jedoch nicht vom Gleichheitszeichen als zentralen Aspekt ausgegangen, sondern der Umgang mit arithmetischen und algebraischen Termen wird als entscheidende Grundlage für das Lösen linearer Gleichungen gesehen.

2. Zur Testentwicklung

Der Test besteht aus insgesamt 40 Items in 6 Itemgruppen (siehe Abbildung). Zwölf Items messen die Kompetenz, lineare Gleichungen lösen zu können (lineG). In der noch ausstehenden Endauswertung des Tests sollen sie die abhängige Variable darstellen. Daneben gibt es noch 5 weitere

Itembezeichnung	Anzahl der Items	Beispiel
str_ar_a	4	Trage die richtigen Zahlen in die Lücken ein: 37_ + 2514 = 370 + _5_6
str_ar_m	4	Trage die richtigen Zahlen in die Lücken ein: 622 · 4_4_ = _11 · 8684
op_al_1	6	Fasse zusammen: $-12x + 6x$ = ___________
op_al_2	8	Multipliziere aus: $(7 - x)3$ = ___________ Faktorisiere: $4x + 4$ = _________
str_ al	6	Bestimme die Lösungsmenge durch geschickte Zahlzerlegung: $3(x+1)$ = 18 = __(__+__) $\mathbb{L}$ = { ____ }
lineG	12	Bestimme die Lösungsmenge der Linearen Gleichung: 12x+3 = 18 $\mathbb{L}$ = { ____ }

Abb.: Itembezeichnungen und Beispiele aus dem Test

(unabhängige) Variablen, wovon 2 Itemgruppen jeweils ein strukturales Additions- bzw. Multiplikationsverständnis abfragen. Hierfür wurde speziell ein neuer Aufgabentyp konstruiert (siehe str_ar_m und str_ar_a), bei denen die jeweiligen Lücken mit den richtigen Ziffern (Zahlen) ergänzt werden müssen, sodass die Gleichung erfüllt ist. Es wird somit ein Verständnis und ein Erkennen-Können über den Aufbau dieser arithmetischen Rechenterme gefordert. Dabei werden die beiden Terme links und rechts des Gleichheitszeichens als äquivalente, formale Ausdrücke und somit als Eigenschaften des struktural aufgefassten mathematischen Begriffs, nämlich der arithmetischen Rechenterme, verlangt. Die Items aus der Gruppe str_al verlangen ein strukturales Verständnis eines algebraischen Terms. Um die Aufgaben erfolgreich bearbeiten zu können, muss die Struktur des Termaufbaus erkannt werden. Die Items op_al_1 und op_al_2 verlangen jeweils ein operationales Verständnis algebraischer Terme. Hier ist es lediglich erforderlich, die betreffenden Operationen korrekt ausführen zu können. Dies betrifft das Zusammenfassen von Teiltermen in den Rechenoperationen Addition und Subtraktion, aber auch das Ausmultiplizieren und Faktorisieren von Termen zueinander, also die Anwendung der Multiplikation. Ausgewertet werden sollen die Daten mit R (R Core Team, 2018, Version 3.5.2). Hierbei sollen explorative und konfirmative Faktorenanalysen (vgl. Beaujean, 2014) eingesetzt werden, die mit den R-Paketen *psych* (Revelle, 2018, version 1.8.10) und *lavaan* (Rosseel, 2012) durchgeführt werden.

3. Ausblick und vorläufige Ergebnisse

Die Datenerhebung ist noch nicht komplett abgeschlossen. Bisher haben über 460 SuS an der Studie teilgenommen. 230 weitere Datensätze sollen im Feburar/März dieses Jahres hinzukommen. Die Datenerhebung erstreckt sich dabei über den 8., 9. und 10. Schuljahrgang der vier verschiedenen Schultypen Hauptschule, Realschule, Gymnasium und integrierte Gesamtschule.

Im Vortrag werden erste vorläufige Ergebnisse aus den bereits erhobenen Daten vorgestellt. Dies betrifft zum einen die Frage, welche Kompetenzen sich statistisch hinter den verschiedenen Aufgaben ermitteln lassen. Weiterhin werden anhand von Strukturgleichungsmodellen latente Korrelationen zwischen den Skalen und eine latente Regression mit der Skala aus den Items zum Lösen linearer Gleichungen (lineG) als Zielvariablen und aller anderen Variablen als Prädiktoren berechnet. Damit soll ermittelt werden, in welchem Maße die verschiedenen Kompetenzen im operationalen und strukturalen Bereich die Fähigkeit, lineare Gleichungen zu lösen, erklären können.

Literatur

Beaujean, A. (2014). Latent Variable Modeling Using R – A Step-by-Step Guide. New York: Routledge.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2006): Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. Journal for Research in Mathematics Education 37 (4), 297-312.

McNeil, N. M., & Alibali, M. W. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. Journal of Cognition and Development, 6, 285-306.

R Core Team (2018). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL: https://www.R-project.org/.

Revelle, W. (2018). psych: Procedures for Personality and Psychological Research, Northwestern University, URL: https://CRAN.R-project.org/package=psych.

Rosseel, Y (2012). lavaan: An R Package for Structural Equation Modeling. Journal of Statistical Software, 48(2), 1-36. URL http://www.jstatsoft.org/v48/i02/.

Sfard, A. (1991): On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. Educational Studies in Mathematics 22 (1), 1-36.