

Beweisverständnis von Studierenden im Bereich Analysis

Eine der größten Schwierigkeiten, die Studierende zu Beginn ihres Studiums bewältigen müssen, ist das Thema „Beweisen“. Gerade in Vorlesungen müssen Studierende viele Beweise lesen und verstehen. Wichtig ist den Dozierenden dabei nicht nur, dass die Studierenden verstanden haben, dass eine spezielle Aussage allgemein gilt, sondern z. B. auch, dass die Studierenden Methoden aus den Beweisen lernen (vgl. Weber, 2012; Mejia-Ramos et al., 2012). Eine Frage ist somit, ob Studierende Beweise so lesen und verstehen.

Theoretischer Hintergrund

Das Konstrukt „Beweisen“ ist vielfach untersucht worden. Selden und Selden (2015) unterteilen „Beweisen“ in vier Komponenten: Beweiskonstruktion, Beweisvalidierung, Beweisevaluation und Beweisverständnis. Bei der Beweiskonstruktion sollen Studierende zu gegebenen Aussagen eigenständig Beweise entwickeln. Dagegen werden ihnen bei der Beweisvalidierung Argumente vorgelegt und sie sollen entscheiden, ob es sich dabei um einen Beweis handelt. Bei der Beweisevaluation sollen Studierende korrekte Beweise nach bestimmten Kriterien einschätzen, z. B. ob diese verständlich aufgeschrieben sind. Die letzte Komponente, das Beweisverständnis, beschäftigt sich mit dem Lesen und Verstehen von geschriebenen und korrekten Beweisen.

In der mathematikdidaktischen Literatur gibt es bisher noch keine etablierte Definition für den Begriff des Beweisverständnisses. Dagegen werden oftmals Ideen für das Messen von Beweisverständnis vorgestellt. So haben z. B. Mejia-Ramos et al. (2012) ein Assessmentmodell für Beweisverständnis entwickelt. Sie teilen Beweisverständnis in zwei verschiedene Ebenen, in die sie sieben Facetten einsortieren. Im lokalen Beweisverständnis soll der Text auf Basis der einzelnen Aussagen verstanden werden. Facetten sind hierbei die *Bedeutung von Termen und Aussagen* zu wissen, den *logischen Status von Behauptungen und Proof Framework* zu erkennen und die *Begründungen von Behauptungen* nachzuvollziehen. Beim globalen Beweisverständnis geht es um das *Zusammenfassen der Hauptideen*, der Aufteilung des Beweises in eine *modulare Struktur*, dem *Transfer der Hauptideen auf einen anderen Kontext* und dem *Bilden von Beispielen zum Verdeutlichen*. Zu jeder dieser einzelnen Facetten geben Mejia-Ramos et al. (2012) auch Beispielfragen für die Entwicklung von Beweisverständnistests an.

Bisher gibt es nur wenig empirische Befunde zur Abgrenzung des Konstruktes Beweisverständnis zu anderen individuellen Merkmalen. Dagegen haben

Forschungen zum allgemeinen Lese- oder Textverständnis Zusammenhängen zwischen dem Lese- oder Textverständnis von Personen und ihrem Vorwissen, ihrem Nutzen von Lesestrategien und ihrem Interesse aufgezeigt (vgl. Pearson et al., 1979; Carell, 1983; Cromley & Azevedo, 2007; Schiefele, 1992). Auch zu anderen Komponenten des Beweisens wurden schon erste Forschungsergebnisse veröffentlicht. So untersuchten Sommerhoff et al. (2016) den Zusammenhang zwischen kognitiven Ressourcen von Studierenden und Beweisvalidierung.

Forschungsfrage

Das Ziel des Dissertationsprojekts ist das Konstrukt Beweisverständnis zu konzeptualisieren und operationalisieren. In diesem Beitrag fokussieren wir dafür auf die folgende Forschungsfrage:

- Welcher Zusammenhang besteht zwischen Beweisverständnis und weiteren individuellen Merkmalen von Studierenden?

Methode

Die Studie wurde zu Beginn des 2. Semesters an einer deutschen Universität durchgeführt. Die Stichprobe besteht aus 63 Studierenden, die entweder Lehramt für Gymnasium mit Fach Mathematik oder Bachelor Mathematik studierten und bisher die gleichen Veranstaltungen besucht hatten.

Mithilfe des zuvor vorgestellten Assessmentmodells von Mejia-Ramos et al. (2012) wurde zu einem Beweis des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung ein Beweisverständnisstest entwickelt. Der Mittelwertsatz wurde in der Analysis I Vorlesung der Probanden ein Semester zuvor behandelt, allerdings unterschied sich der Beweis von dem im Test genutzten Beweis. Der Test besteht aus 10 Items, wobei 5 Items auf der lokalen Ebene und 5 auf der globalen Ebene des Beweisverständnisses einzuordnen sind. Die Bearbeitung der Items (offen und multiple-choice mit 4 Antwortmöglichkeiten) wurden dichotom mit 0 und 1 codiert. Zusätzlich wurden Vorleistungen der Studierenden (Gesamtabiturnote, letzte schulische Deutsch- und Mathematiknote, Note der Analysis I Prüfung), ihr Vorwissen in Analysis mithilfe eines kurzen Tests (Rach & Heinze, 2017) und ihr Leseverständnis mit einem Stolperwörtertest (Mashkovskaya, 2012) erhoben. Ebenso wurden die Studierenden aufgefordert, Aussagen auf einer vierstufigen Likert-Skala von „trifft zu“ bis „trifft nicht zu“ bzgl. der folgenden Themen einzuschätzen: Interesse an Beweisen, Interesse an Hoch- und Schulmathematik (Ufer, Rach & Kosiol, 2017), Selbstkonzept bzgl. Beweisen und Selbstkonzept bzgl. Hoch- und Schulmathematik (Ufer, Rach & Kosiol, 2017).

Ergebnisse

Zunächst zeigte eine explorative Faktorenanalyse keine Evidenz für ein zweifaktorielles Modell des Beweisverständnisses, weshalb die Items des Beweisverständnistests zu einer Skala zusammengefügt wurden. Die Reliabilität dieser Skala war akzeptabel. Ein Item wies eine schlechte Trennschärfe auf und wurde folglich aus der Analyse ausgeschlossen, wodurch die Reliabilität verbessert werden konnte. Die Items wurden zu einem Gesamtscore zusammengefasst ($M = 3,2$; $SD = 1,7$; $Max = 9$). Bivariate Korrelationen zeigten signifikant mittlere bis starke Zusammenhänge zwischen Beweisverständnis und der Analysis I Note, dem Vorwissen in Analysis und eine negative Korrelation zum Interesse an Schulmathematik. Evidenzen für einen Zusammenhang zwischen Beweisverständnis im Bereich der Analysis und dem Leseverständnis sowie den weiteren Interessensarten oder dem Selbstkonzept der Studierenden haben sich nicht gezeigt.

Diskussion

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass sich das Konstrukt Beweisverständnis theoretisch in eine lokale und eine globale Ebene unterteilen lässt (Mejia-Ramos et al., 2012). Diese Unterteilung konnten wir empirisch nicht bestätigen. Außerdem scheint es konform mit den Erkenntnissen aus der Lese- und Textverständnisliteratur zu sein, dass Beweisverständnis mit dem Vorwissen der Probanden zusammenhängt (vgl. z. B. Pearson et al., 1979; Carell, 1983; Cromley & Azevedo, 2007). Dagegen konnten, im Gegensatz zu den Ergebnissen aus der Lese- und Textverständnisliteratur (vgl. Schiefele, 1992), keine (positiven) Zusammenhänge zwischen dem Interesse der Studierenden und Beweisverständnis im Bereich Analysis nachgewiesen werden. Stattdessen korreliert das Interesse an Schulmathematik überraschend negativ mit dem Beweisverständnis. Ebenso gab es keinen nachweisbaren Zusammenhang von Beweisverständnis zum Selbstkonzept der Studierenden oder zum Leseverständnis.

Aufgrund der sehr kleinen Stichprobe kann diese Studie nur erste Erkenntnisse liefern. Zusätzlich ist zu bedenken, dass das Beweisverständnis bisher nur anhand eines Beweises im Bereich Analysis erfasst wurde. Somit darf keinesfalls von einem „allgemeinen“ Beweisverständnis gesprochen werden. Außerdem besteht die Vermutung, dass die Bearbeitung des Beweisverständnistests zu einer Änderung des Leseverhaltens des Beweises führt. In einer Folgestudie versuchen wir hierzu neue Erkenntnisse zu gewinnen.

Literatur

Carrell, P. L. (1983). Three components of background knowledge in reading comprehension. *Language Learning*, 33(2), 183–203.

- Cromley, J.G., & Azevedo, R. (2007). Testing and Refining the Direct and Inferential Mediation Model of Reading Comprehension. *Journal of Educational Psychology*, 99(2), 311–325.
- Mashkovskaya, A. (2013). *Der C-Test als Lesetest bei Muttersprachlern* (Doktorarbeit, Universität Duisburg-Essen). https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet/Derivate-34531/Dissertation_2014_01_06.pdf (25.10.2018)
- Mejia-Ramos, J.P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 79(1), 3–18.
- Hodds, M., Alcock, L., & Inglis, M. (2014). Self-explanation training improves proof comprehension. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 62–101.
- Pearson, P. D., Hansen, J., & Gordon, C. (1979). The Effect of Background Knowledge on Young Children's Comprehension of Explicit and Implicit Information. *Journal of Literacy Research* 11(3), 201–209
- Rach, S., & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics: Which Influence Do School-Related Variables Have? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(7), 1343–1363.
- Schiefele, U. (1992). Topic interest and levels of text comprehension. In K. A. Renninger, S. Hidi, A. Krapp & A. Renninger (Eds), *The role of interest in learning and development* (151–183). New York.
- Selden, A. S. J., & Selden, J. (2015). A comparison of proof comprehension, proof construction, proof validation and proof evaluation. *Didactics of Mathematics in Higher Education as a Scientific Discipline Conference Proceedings*, 339–345.
- Sommerhoff, D., Ufer, S., & Kollar, I. (2016). Proof validation aspects and cognitive student prerequisites in undergraduate mathematics. In C. Csíkos, A. Rausch, A., & J. Sztányi, (Hrsg.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 219–226). Szeged, Hungary.
- Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(4), 463–482.
- Weber, K. (2015). Effective proof reading strategies for comprehending mathematical proofs. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1(3), 289–314.