

## **Blickbewegungen beim Vergleichen von Bruchstreifen**

Visualisierungen können Schülerinnen und Schüler beim Mathematiklernen unterstützen. Beim Vergleichen von Brüchen erscheinen Bruchstreifen besonders vorteilhaft, weil Bruchgrößen unmittelbar visuell erkennbar sind. Auf diese Weise kann typischen Fehlvorstellungen und Fehlstrategien (z. B. eine Beschränkung auf den Vergleich der Zähler) entgegengewirkt werden. Psychologische Studien zeigen, dass schon kleine Kinder in der Lage sind, visuell dargestellte Brüche und Verhältnisse zu vergleichen. Allerdings zeigen diese Studien auch, dass Kinder besser abschneiden, wenn diese Verhältnisse ohne sichtbare Unterteilungen („kontinuierlich“) dargestellt werden, als wenn die Unterteilungen sichtbar sind („diskret“). Es wird vermutet, dass die sichtbaren Unterteilungen zum Vergleich absoluter Anzahlen (Vergleich der Zähler) verleiten können. Die vorliegende Studie hat das Ziel, mit der Methode des Eye Tracking die Prozesse beim Vergleichen kontinuierlicher versus diskreter Bruchstreifendarstellungen genauer zu untersuchen. Der vorliegende Beitrag berichtet über eine Vorstudie zur Eignung der Methode an einer Stichprobe Erwachsener. Daten aus einer Erhebung mit Schülerinnen und Schülern werden derzeit ausgewertet.

### **1. Theoretischer Hintergrund**

Die vielfältigen Schwierigkeiten beim Umgang mit Brüchen sind hinlänglich bekannt. Als eine wesentliche Ursache gelten die nicht vollzogenen Vorstellungsumbrüche, die beim Übergang von den natürlichen Zahlen zu den rationalen Zahlen notwendig sind (z. B. Prediger, 2007). In der psychologischen Literatur wird der unzulässige Rückgriff auf Eigenschaften natürlicher Zahlen beim Umgang mit Brüchen auch als „Natural Number Bias“ bezeichnet (Ni & Zhou, 2005). Beim Vergleichen von Brüchen oder Verhältnissen äußert sich dieser Bias darin, dass Schülerinnen und Schüler sich auf einen Vergleich der Absolutzahlen bzw. der Komponenten der Brüche stützen und die relativen Zahlwerte bzw. Bruchgrößen unbeachtet lassen.

Diese Befunde haben zu der Annahme geführt, dass das menschliche kognitive System für das Verarbeiten diskreter Anzahlen prädestiniert und das Verarbeiten von Verhältnissen deshalb mit einem großen kognitiven Aufwand verbunden sei. Neuere Studien legen allerdings nahe, dass bereits kleine Kinder ein grundsätzliches Verständnis für visuell präsentierte Längenverhältnisse haben. In der Studie von Boyer und Levine (2015) wurde Kindergarten- und Grundschulkindern eine Getränkemischung aus Saft und

Wasser gezeigt. Die jeweiligen Anteile an Saft bzw. Wasser wurden als farbig markierte Anteile eines Streifens dargestellt. Die Kinder sollten aus zwei Alternativen das Verhältnis auswählen, das dem gegebenen Verhältnis entsprach. Es zeigte sich, dass die Kinder grundsätzlich in der Lage waren, die Aufgabe zu lösen. Jedoch schnitten sie besser ab, wenn die Darstellung kontinuierlich war als wenn sie diskret war, die Streifen also zählbare Teile enthielten. Ob die Kinder tatsächlich zählten, konnte in der Studie allerdings nicht geklärt werden. Allgemein sind die kognitiven Prozesse beim Vergleichen von Bruchstreifen und insbesondere der Einfluss visuell leicht wahrnehmbarer Merkmale (Gesamtlänge, Unterteilungen) bislang nicht geklärt.

In der vorliegenden Studie werden diese Prozesse mit der Methode des Eye Tracking untersucht, da Eye Tracking eine vergleichsweise proximale Erfassung kognitiver Prozesse ermöglicht (Mock, Huber, Klein & Moeller, 2016). Ähnlich wie in Studien zum Vergleichen symbolisch dargestellter Brüche (z. B. Obersteiner & Tumpek, 2016) sind insbesondere die schnellen Blickbewegungen (Sakkaden) zwischen relevanten Bereichen von Interesse.

## 2. Methode

Die Stichprobe bestand aus 33 Studierenden der Psychologie (19 weiblich, Alter: 19,6 Jahre; nach Ausschluss 1 Person wegen geringer Tracking-Genauigkeit) an einer US-amerikanischen Universität. Den Teilnehmern wurden nacheinander 44 Items zum Vergleichen von Bruchstreifen auf einem Monitor präsentiert. Ihre Blickbewegungen wurden mit einem SMI RED Eye-Tracker mit einer Frequenz von 250 Hz gemessen.

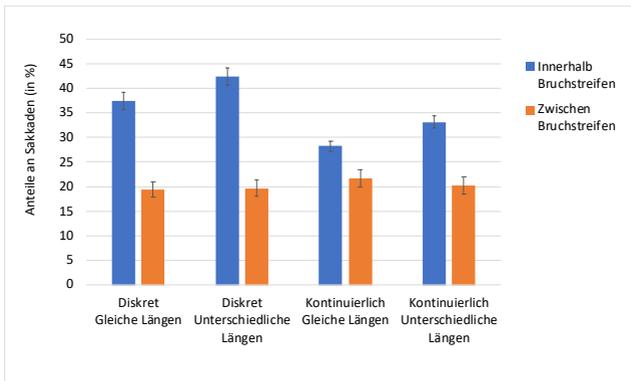
Die 44 Items wurden so entwickelt, dass jeweils 11 Items einer der vier Bedingungen eines 2x2-Designs angehörten, wobei die Dimensionen *Darstellungsform* (diskret/kontinuierlich) und *Länge* (gleich/unterschiedlich) variierten: Die Items waren also entweder diskret oder kontinuierlich dargestellt und die beiden Bruchstreifen eines Items hatten entweder dieselbe oder aber unterschiedliche Längen (s. auch Abb. 2). Weitere, möglicherweise relevante Merkmale (z. B. die Länge und die Anzahl der markierten Teile) wurden systematisch variiert. Obwohl sich die Items in den vier Bedingungen visuell voneinander unterschieden, waren die zu Grunde liegenden numerischen Brüche identisch.

## 3. Ergebnisse

Erwartungsgemäß waren insgesamt die Lösungsraten hoch ( $M = 87 \%$ ,  $SD = 7$ ) und die Reaktionszeiten niedrig ( $M = 4.0$  s,  $SD = 1.5$ ). Allerdings zeigten sich in beiden Variablen signifikante Effekte von *Darstellungsform* und *Länge*. Die Versuchspersonen waren akkurater und schneller bei

kontinuierlichen im Vergleich zu diskreten Darstellungen (part.  $\eta^2 = .22$  bzw.  $.51$ ), sowie bei Bruchstreifen mit gleichen Längen im Vergleich zu unterschiedlichen Längen (part.  $\eta^2 = .65$  bzw.  $.37$ ). Bezüglich der Anzahlen an Fixationen und Sakkaden zeigte sich ein ganz analoges Bild, nämlich weniger Fixationen und Sakkaden für kontinuierliche versus diskrete Darstellungen, und für Darstellungen gleicher versus unterschiedlicher Längen.

Von vorwiegendem Interesse waren die Verteilungen der Häufigkeiten der Sakkaden, die *zwischen* den beiden Bruchstreifen eines Items stattfanden, im Vergleich zu solchen, die *innerhalb* der Bruchstreifen stattfanden. Während die Häufigkeiten der Sakkaden *zwischen* den Bruchstreifen in allen Bedingungen etwa gleich hoch waren, zeigten sich für die Häufigkeiten der Sakkaden *innerhalb* der Bruchstreifen signifikante Effekte für *Darstellungsform* und *Länge*. Wie Abbildung 1 zeigt, waren diese Häufigkeiten am größten für diskrete Darstellungen mit unterschiedlichen Längen, gefolgt von diskreten Darstellungen mit gleichen Längen. In der kontinuierlichen Bedingung waren diese Sakkaden deutlich seltener zu finden, hier wiederum häufiger für Darstellungen mit unterschiedlichen Längen als mit gleichen Längen.



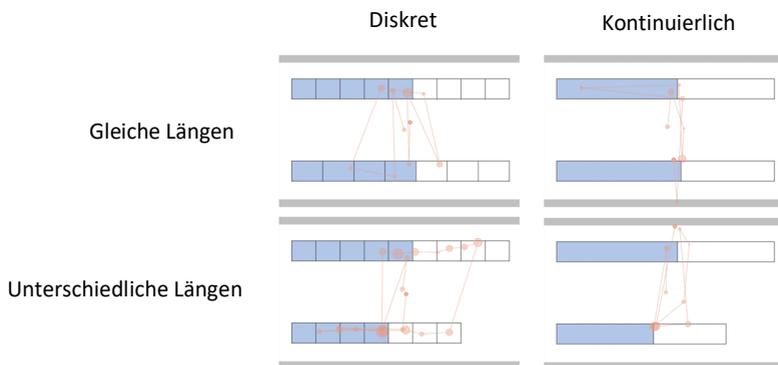
**Abb. 1:** Häufigkeit der Sakkaden innerhalb und zwischen Bruchstreifen für die vier Bedingungen

Zur Illustration der Ergebnisse zeigt Abbildung 2 exemplarisch die Blickbewegungen eines Probanden beim Bearbeiten je eines Items in den vier Bedingungen. Obwohl die dargestellten Brüche in den vier Bedingungen numerisch identisch sind, lassen sich deutliche Unterschiede im Blickverhalten und insbesondere in den Sakkaden innerhalb der Bruchstreifen erkennen.

#### 4. Diskussion

Die Studie zeigt, dass Erwachsene beim Vergleichen von Bruchstreifen in kontinuierlicher Darstellung akkurater und schneller sind als beim Vergleich

von Bruchstreifen in diskreter Darstellung. Ferner kommen sie bei kontinuierlicher Darstellung mit weniger Fixationen aus und benötigen weniger Sakkaden innerhalb der Bruchstreifen als bei diskreter Darstellung. Es liegt nahe anzunehmen, dass die sichtbaren, diskreten Unterteilungen dazu anregen, diese auch zu betrachten und sie möglicherweise zu zählen. Ergänzende Interviews, die mit den Teilnehmern geführt wurden (hier nicht berichtet), bestätigen diese Annahme.



**Abb. 2:** Blickbewegungen einer Versuchsperson beim Vergleich von Bruchstreifen in den vier verschiedenen Bedingungen des 2x2-Designs

Aus mathematikdidaktischer Sicht sind die berichteten Ergebnisse interessant, da diskrete Darstellungen besonders dafür geeignet sind, um die visuellen Darstellungen in exakte symbolische Bruchdarstellungen zu übersetzen. Für einen schnellen und intuitiven Vergleich von Bruchstreifen scheinen dagegen kontinuierliche Darstellungen besser geeignet zu sein.

## Literatur

- Boyer, T. W., & Levine, S. C. (2015). Prompting children to reason proportionally: Processing discrete units as continuous amounts. *Developmental Psychology*, 51, 615–620.
- Mock, J., Huber, S., Klein, E., & Moeller, K. (2016). Insights into numerical cognition: Considering eye-fixations in number processing and arithmetic. *Psychological Research*, 80, 334–359.
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, 40, 27–52.
- Obersteiner, A., & Tumpek, C. (2016). Measuring fraction comparison strategies with eye-tracking. *ZDM Mathematics Education*, 48, 255–266.
- Prediger, S. (2007). Konzeptwechsel in der Bruchrechnung – Analyse individueller Denkweisen aus konstruktivistischer Sicht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*, 203–206. Hildesheim: Franzbecker.