Reinhard OLDENBURG, Augsburg

Schwierigkeiten von Studierenden in der Analysis I

Die Vorlesung Analysis I stellt für viele Studierende eine erhebliche Einstiegshürde ins Mathematikstudium dar. Es gibt bereits eine Reihe von Untersuchungen in diesem Kontext. Beispielsweise wurden einzelne Begriffe und Theorien (etwas das Grenzwertkonzept) detailliert untersucht oder es wurden prozessbezogene Kompetenzen beleuchtet, etwa das Beweisen. Dennoch fehlt m.E. ein genaues Verständnis der Schwierigkeiten von Studierenden in dieser Vorlesung. Ein solches Verständnis sollte so detailliert sein, dass es konkrete Gestaltungsvarianten der Vorlesung nahelegen kann. Auf der Suche nach solchen Erkenntnissen wurde eine längsschnittliche Studie durchgeführt.

1. Studiendesign

Der Autor liest in mehreren Durchgängen die Analysis I und hat von daher eigene Vermutungen zu Schwierigkeiten der Studierenden. Um diese zu überprüfen und weitere Hypothesen zu generieren, wurde im WS18/19 ein kleinformatiges längsschnittliches Design gewählt. Während die Analysis I von einem Kollegen gelesen wurde, wurden ab der dritten Vorlesungswoche fünf Studierende ausgewählt, deren Lernfortschritt durch wöchentliche 30-minütige Individualsitzungen erhoben wurde.

Die Probanden wurden nach Verfügbarkeit durch Rundmail akquiriert. Bedingung war, im ersten Semester zu studieren und nach den Erfahrungen der ersten beiden Wochen, größere Schwierigkeiten zu erwarten. Ausgewählt wurden 5 Studierende (3w, 2m), drei aus dem Studiengang Bachelor Mathematik und je einer Bachelor Physik und Bachelor Wirtschaftsmathematik.

In den wöchentlichen Sitzungen haben die Studierenden ihre Übungsaufgaben gezeigt und berichtet, welche Probleme sie haben. Außerdem wurden ihnen gezielte Diagnoseaufgaben gestellt, die direkt in der Sitzung im Dialog bearbeitet wurden. Übungsaufgaben wurden fotokopiert, die in den Sitzungen durchgeführten Rechnungen als Niederschrift aufbewahrt und Notizen zum Gesprächsverlauf gemacht. Auf Basis dieser Daten werden abduktiv Hypothesen gebildet.

2. Erste Ergebnisse

Da die Datenerhebung zum Zeitpunkt der Erstellung dieses Beitrags noch nicht abgeschlossen ist, können hier nur einige vorläufige Erkenntnisse zusammengetragen werden.

Gemeinsamer Kern vieler Schwierigkeiten ist die Verknüpfung von Vorstellungen und formalen Beschreibungen. Die ist keine neue Erkenntnis, schon die alte Unterscheidung von concept image und concept definition nach Tall&Vinner (1981) arbeitet damit. Über die Beziehung dieser Konzepte zu Grundvorstellungen und Aspekten wurde in Greefrath et al. (2016) berichtet. Oldenburg (2014) hat die Sichtweise dargestellt, nach der Begriffsbildung und Formalisierung Formen des Modellbildens sind. Dies hat sich auch bei der vorliegenden Untersuchung bewährt, doch dazu später mehr. In der Kürze dieses Beitrags sollen nur die Hauptproblembereiche abgerissen werden.

Problemfeld Wissen: Alle fünf Studierenden hatten Mühe, das nötige Wissen präsent zu haben. Um den Zugriff auf eine Aufgabe zu bekommen, wurde empfohlen, das Wissen über die relevanten Konzepte aufzuschreiben. Es zeigte sich dabei, dass selbst gegen Mitte der Vorlesungsperiode noch Lücken vorhanden waren. Beispielsweise konnten viele die Dreiecksungleichung und die umgekehrte Dreiecksungleichung nicht hinschreiben. Weiter war das Wissen über Standardsätze (zB Quotientenkriterium) zu bruchstückhaft, um nützlich sein zu können. Ein weiteres Problem ist, dass auch scheinbar triviale Fakten, wie etwa $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq |x|$, nützlich sein können, aber von den Studierenden unterschätzt und deswegen ignoriert werden.

Problemfeld Interpretation: Die Studierenden wurden regelmäßig gebeten, Definitionen und Aussagen aus der Vorlesung oder von den Übungsblättern zu erklären. Dabei zeigten sich erhebliche Probleme, formale Aussagen in das eigene Denken so zu integrieren, dass sie umstrukturiert werden können. Oft erwiesen sich implizite Quantoren als Problem, vgl. Shipmann (2016). Interessante Impulse konnten gegeben werden durch die Frage, ob Aussagen als plausibel eingeschätzt werden. Dies führte oft zur Generierung von Beispielen, die aber in aller Regel die betrachtete Domäne nicht ausreichend ausloten, so dass die Skepsis von *Mejía-Ramos et al. (*2011) gegenüber der Nützlichkeit von durch Studierende generierte Beispiele bestätigt werden muss.

Problemfeld Formalisierung: Intuitive Konzepte formal auszudrücken, so dass formale Beweise möglich werden, ist ein zentrales Lernziel der Analysis I. Es ist gleichzeitig extrem schwierig. Beispiel: Etwa zwei Wochen, nachdem in der Vorlesung das Infimum einer Menge behandelt wurde, sollten die Studierenden dieses Konzept zunächst erklären und dann so aufschreiben, dass damit Beweise möglich sind. Eine Studentin sagte: „Das Infimum ist so etwas wie das Minimum, nur dass es nicht zur Menge gehören muss.“ Dieses sinnvolle, intuitive Verständnis konnte sie aber nicht formal ausdrücken. Ihr erster Versuch lautete: $\forall x < \inf(M): x \notin M$

Dies ist zwar richtig, aber nicht charakterisierend. Am Beispiel des offenen Intervalls (1,2) erkannte sie die Unzulänglichkeit. Im zweiten Anlauf benutzte sie die Abkürzung $a := \inf(M)$und schrieb:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad a+t \in M$$

Interessanterweise kann die Unzulänglichkeit dieser Form am gleichen Beispiel eingesehen werden. Woraufhin sie den dritten, immer noch unvollständigen Anlauf machte:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \; \exists x \in M : a+t > x$$

Hilfreich war in diesen Gesprächen die konkrete Arbeit am Zahlenstrahl mit Beispielmengen. Der Existenzquantor kann dort gut durch eine suchende Zeige-Geste visualisiert werden, während für den Allquantor durch eine bewegende Geste die Allgemeinheit illustriert werden kann.

Nachdem eine adäquate Formulierung gefunden wurde und zwei einfache Beispiele betrachtet wurde, sollte das Supremum von $M := \left\{\frac{3x}{x+2} | x \in \mathbb{R}^+\right\}$ermittelt werden. Nach einem numerischen Erkunden versuchte die Studentin nachzuweisen, dass 3 eine obere Schranke ist und schrieb auf: $\forall m \in M: \exists x \in \mathbb{R}^+: m = \frac{3x}{x+2} \land m < 3$. Diese ungeschickt komplexe Formulierung wurde in der mündlichen Erläuterung dadurch begründet, dass bei der naheliegende (richtigen) Form $\forall x \in \mathbb{R}^+: \frac{3x}{x+2} < 3$gar nicht über alle Elemente der Menge gesprochen wird. Weiter bleib im Vergleich der beiden Formen schwierig, dass das $x$unter verschiedenen Quantoren steht.

Problemfeld Attributionsfehler: Dieser Fehlertyp wurde bisher in der Literatur wohl wenig untersucht, und kommt auch nur mäßig oft vor, dann aber er behindert an verschiedenen Stellen. Beispiel: Ein Student soll ausdrücken, dass *x* von 5 einen Abstand von weniger als 1 und schreibt auf: $x - 5 \leq |1|$. Dies mag wie ein Flüchtigkeitsfehler bei der Übersetzung der umgangssprachlichen Formulierung „*x*-5 ist betragsmäßig keiner 1“ wirken, aber die Beispiele sind vielfältig, zum einen beim Umkehrfehler in der elementaren Algebra (etwa bei der Aufgabe „Der Rhein ist *r* km lang und 200km länger als die Elbe, die *e* km lang ist.“ die fehlerhafte Gleichung *r*+200=*e*, die möglicherweise dem Rhein das Attribut gibt, 200km länger zu sein.), zum anderen bei Beträgen. Ein Student schrieb beim Versuch, die

Dreiecksungleichung $|a+b| \leq |a|+|b|$zu begründen: 1. Fall $a>0$, $b>0 \Rightarrow a+b \leq a+b$, 2. Fall: $a>0, b<0 \Rightarrow a-b \leq a-b$. Hier wird offensichtlich das negative Vorzeichen bei b als Attribut der Negativität missverstanden.

4. Fazit

Die bisher gesammelten Erfahrungen legen konkrete Maßnahmen nahe:

- Es ist sinnvoll, den Studierenden neben dem Skript eine konzentrierte Sammlung der wichtigsten Eigenschaften an Hand zu geben, die (anders als alle Beweise) auswendig gelernt werden müssen.
- Die Arbeit mit Variablen in der Prädikatenlogik sollte intensive und explizit thematisiert werden. Insbesondere die Unterscheidung von gebundenen und freien Variablen erschließt sich nicht von selbst und führt zu vielen Fehlern.
- Die Erfahrungen mit Ungleichungen aus der Schule sind zu eingeschränkt. Hier kann aufbauend auf (Oldenburg 2018) auch mit Unterstützung digitaler Werkzeuge gearbeitet werden.
- Formalisierungsübungen sollten einen breiten Raum einnehmen. In künftigen Durchgängen der Analysis I sollen daher die Möglichkeiten genutzt werden, im Rahmen von Computeralgebrasystemen mit Quantoren umzugehen (Oldenburg 2014).

Literatur

Greefrath, *G.; O*ldenburg, R.; Siller, H.-St.; Ulm, V.; Weigand, H.-G. (2016b). Aspects and "Grundvorstellungen" of the concepts of derivative and integral – subject matter related didactical perspectives of concept formation. In: Journal für Didaktik der Mathematik, Suppl. 1, Wiesbaden: Springer. S. 99 – 129.

Mejía-Ramos, J. P., Simpson, SA., Weber, K. (2011). Does generating examples aid proof production? Educ Stud Math (2011) 77:1–14.

Oldenburg, R. (2014). Gains and Pitfalls of Quantifier Elimination as a teaching tool, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, Volume 6, Number 6.

Oldenburg, R. (2018). Logi und Ungleichungen – ein leider exotisches Thema. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018*, 1347-1350. Münster: Waxmann.

Shipman, B. A. (2016). Subtleties of hidden quantifiers in implication.Teach. Math. Appl. 35, No. 1, 41-49.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*,12 (2), 151-169.