Norbert OLEKSIK, Würzburg

Äquivalenzumformung – mehr als nur Regeln

Äquivalenzumformungen werden häufig, als „Umformung[en] einer Gleichung, bei der sich die Lösungsmenge nicht ändert“ (Vollrath & Weigand, S. 246) definiert. Im Allgemeinen wird darunter das beidseitig additive und multiplikative Verknüpfen von Zahlen gefasst. Im zweiten Fall gilt dies nur für von Null verschiedenen Zahlen. Das beidseitige Quadrieren einer Gleichung hingegen, wird nicht als Äquivalenzumformung aufgefasst (vgl. ebd., S. 214; Arens et al., S. 58). Beim Betrachten des nachfolgenden Beispiels fällt aber auf, dass das Quadrieren einer Gleichung durchaus auch den obigen Anforderungen gerecht werden kann:

$$x^2 = 4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

$$x^4 = 16 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Obwohl die Lösungsmenge hier unverändert bleibt, wird beim Quadrieren nicht von einer Äquivalenzumformung gesprochen. Zugegebenermaßen ist dies ein Sonderfall. In den meisten Fällen führt das Quadrieren doch eher dazu die Lösungsmenge zu erweitern, weshalb von einer Gewinnumformung gesprochen wird (vgl. Vollrath & Weigand, S. 214).

Im Lexikon der Mathematik werden Äquivalenzumformungen in Abgrenzung zu nicht äquivalenten Umformungen, die die Lösungsmenge *möglicherweise* verändern, definiert (vgl. Walz, 2017, S. 361). Hierbei wird also eine Art Allgemeingültigkeit gefordert, denn aus der Definition lässt sich schließen, dass Äquivalenzumformungen die Lösungsmenge nie ändern. Diese Ergänzung schränkt den Umfang des Begriffes (die Tätigkeiten, die unter den Begriff Äquivalenzumformungen fallen) ein, so dass das bspw. die Behauptung, dass das Quadrieren keine Äquivalenzumformung darstellt, rechtfertigt. Die eingangs gewählte Definition hingegen lässt eine flexible Interpretation bezüglich der Umformungstätigkeiten zu und bietet einen weiter gefassten Begriffsumfang. So könnten auch die beiden folgenden Beispiele als äquivalent umgeformt angesehen werden, wenngleich solche „Umformungen“ nur selten zu äquivalenten Gleichungen führen:

$$x + 1 = x \qquad\qquad sin(x) = 2$$

$$x + 2 = x \qquad\qquad x + 4 = x$$

Da die geläufige Definition von Äquivalenzumformungen solche Interpretationen zulässt, stellt sich die Frage, weshalb gewisse Umformungen als Äquivalenzumformungen angesehen werden, andere hingegen nicht. Entscheidend hierfür ist die den Umformungen zugrundeliegende Eigenschaft, zu einer äquivalenten Gleichung zu führen. Aus diesem Grund wird im Folgenden die Äquivalenz von Gleichungen näher erläutert.

Äquivalenz von Gleichungen

In der vorangegangenen Diskussion wurden Äquivalenzumformungen mit Blick auf die Lösungsmenge diskutiert. Allerdings kann neben der Lösungsmengenäquivalenz, außerdem zwischen der Einsetzungs- und der Umformungsäquivalenz von Gleichungen unterschieden werden (vgl. Oldenburg, 2016). Werden die beiden letzten Äquivalenzbegriffe als Grundlage für Äquivalenzumformungen genommen, so bieten diese neue Perspektiven.

Umformungsäquivalenz

Anders als bei der Lösungsmengenäquivalenz wird die Umformungsäquivalenz nicht mit Bezug zur Lösungsmenge definiert, sondern über die Beziehung zwischen den Gleichungen untereinander, denn „*Zwei Gleichungen (oder Terme) sind umformungsäquivalent, wenn sie durch eine Kette zulässiger Äquivalenzumformungen ineinander umgeformt werden können*“ (Oldenburg, 2016, S. 11). Dieser Äquivalenzbegriff erfordert allerdings Kenntnisse über zulässige Umformungen, welche üblicherweise über Regeln beschrieben werden. So auch die *Waageregeln*, wobei die Buchstaben Terme repräsentieren (nach Malle, 1993, S. 219):

$$A = B \;\Leftrightarrow A + C = B + C \qquad\qquad A = B \;\Leftrightarrow A - C = B - C$$

$$A = B \;\Leftrightarrow A \cdot C = B \cdot C \quad (C \neq 0) \qquad A = B \;\Leftrightarrow A : C = B : C \quad (C \neq 0)$$

Nun lässt sich keine direkte Anwendung dieser Regeln, bzw. eine Kette dieser, in den obigen Gleichungspaaren erkennen, was eine Erklärung dafür sein kann, weshalb man in den obigen Beispielen nicht von Äquivalenzumformungen spricht. Dies heißt aber nicht, dass die bzw. der Einzelne nicht weitere oder andere Regeln als zulässig anerkennt. So könnten die Waageregeln als „auf beiden Seiten dasselbe machen“ zusammengefasst werden (vgl. Arcavi, Drijvers, & Stacey, 2017, S. 66). Dies kann bspw. das Quadrieren oder Wurzelziehen als Äquivalenzumformungen erscheinen lassen, auch dann, wenn sie die Lösungsmenge verändern. Nun könnte der letzte Fall als Fehlvorstellung abgetan werden und die Waageregeln als Definition von Äquivalenzumformungen angesehen werden. Allerdings können die Regeln auch nicht ganz bedenkenlos angewendet werden, wie die beiden folgenden Beispiele zeigen:

$$x^2 = x \qquad\qquad x + \frac{1}{x-3} = 3 + \frac{1}{x-3}$$

$$x = 1 \qquad\qquad x = 3$$

Im linken Beispiel wird die Lösungsmenge verringert, da beim Dividieren durch die Variable (unwissentlich) durch Null geteilt wird. Bei dem rechten Gleichungspaar wurde zwar äquivalent umgeformt, das wird aber erst erkenntlich, wenn der Definitionsbereich der Variable in Betracht gezogen wird, denn die Variable x ist für den Wert 3 nicht definiert. Daher ist auch die zweite Gleichung nicht lösbar. Wird die Definitionslücke nicht berücksichtigt, dann kann die Bruchgleichung lösbar erscheinen, bzw. die Anwendung einer Waageregel zu einer nicht äquivalenten Gleichung führen. Immerhin kann dann ja in die Gleichung $x = 3$ die Zahl Drei eingesetzt werden, während die gleiche Zahl in der Bruchgleichung keine Lösung darstellt, da sie das Dividieren durch Null erfordern würde. Alleinig auf Grund einer erkannten Waageregel, kann also nicht immer auf die Äquivalenz zweier Gleichungen geschlossen werden. Beinhaltet der Term, mit dem eine Gleichung umgeformt wird, Variablen, so gilt es den Definitionsbereich der Variablen zu berücksichtigen und/oder zu prüfen, ob sich die Lösungsmenge ändert. Es muss also die Äquivalenz der Gleichungen geprüft werden. Dabei kann die Einsetzungsäquivalenz hilfreich sein.

Einsetzungsäquivalenz

Der Begriff der Äquivalenz ist auch in der Logik gebräuchlich, weshalb im Folgenden ein (leider sehr kurzer) Exkurs in diese Disziplin stattfindet. Die Äquivalenz zweier Aussagen bzw. Aussageformen wird durch den Junktor $\Leftrightarrow$ angezeigt. Für $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ bedeutet dies, dass beim Einsetzen von Werten für die gesuchte Variable x beide Aussageformen $A(x)$ und $B(x)$ entweder beide wahr oder beide falsch sind (vgl. Kirsch, 1987, S. 140). Sie teilen sich also die gleiche Lösungsmenge. In Tabelle 1 wird das daran erkenntlich, dass die Zelleneinträge innerhalb einer Spalte identisch sind:

	…	$x = -2$	$x = -1$	$x = 0$	$x = 1$	$x = 2$	$x = 3$	…
$x^2 = 4$	…	wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch	…
$x^4 = 16$	…	wahr	falsch	falsch	falsch	wahr	falsch	…

Tabelle 1: Wahrheitswerte der Gleichungen $x^2 = 4$ $(x \in \mathbb{R})$ und $x^4 = 16$ $(x \in \mathbb{R})$

Da die Definitionsbereiche der gesuchten Variablen sich in der Regel über unendliche viele Elemente erstrecken, ist es jedoch nicht möglich jeden Wert einzeln zu prüfen. Nützlich ist ein Einsetzungsverfahren vor allem, um zu prüfen, ob Lösungen nach dem Umformen einer Gleichung hinzugewonnen wurden. Die ermittelte Lösungsmenge wird in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt und die Wahrheitswerte geprüft. Diese Probe gibt allerdings keinen Aufschluss darüber, ob Lösungen verloren wurden. Hierfür sind weitere Prüfmechanismen notwendig.

Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurde der Begriff der Äquivalenzumformung aus theoretischer Perspektive diskutiert. Bei der Betrachtung der aufgeführten Beispiele wird deutlich, dass der Begriff komplexer ist als häufig dargestellt. Wird der Begriff lediglich über die Lösungsmengenäquivalenz definiert, so hängt das vom jeweiligen Gleichungspaar ab, ob eine Äquivalenzumformung vorliegt oder nicht. Wird die Anforderung gestellt immer zu einer äquivalenten Gleichung zu führen, fasst der Begriff im Wesentlichen das Verknüpfen von Zahlen, verschieden von Null. Werden Termen verknüpft, so kann sich die Lösungsmenge möglicherweise ändern. Häufig ist es aber notwendig Terme zu verknüpfen, weshalb die Äquivalenz von Gleichungen anderweitig zu prüfen ist (bspw. durch eine Probe unter Berücksichtigung der Einsetzungsäquivalenz). Stellt die Umformungsäquivalenz die Basis für Äquivalenzumformungen dar, so erfordert dies festzulegen, welche Umformungstätigkeiten zulässig sind. Eine solche Festlegung gestaltet sich, wie am Beispiel der Waageregeln diskutiert, nicht ganz unproblematisch.

Je nachdem welche Eigenschaft zugrunde gelegt wird, kann das Verständnis von Äquivalenzumformung variieren. Daher stellt sich die Frage, nach dem subjektiven Verständnis von Äquivalenzumformungen. Welche Umformungstätigkeiten werden als Äquivalenzumformungen angesehen? Darüber hinaus ist unklar, ob und welche weiteren Äquivalenzbegriffe berücksichtigt werden. Welche Grundvorstellungen lassen sich aus diesen Überlegungen ableiten und welche Fehlvorstellungen liegen vor? Diese Fragen werden in Zukunft anhand der hier dargestellten und weiteren Überlegungen im Rahmen eines Dissertationsprojektes des Autors weiter untersucht.

Literatur

Arcavi, A., Drijvers, P., Stacey, K. (2017). *The Learning and Teaching of Algebra. Ideas, Insights, and Activities.* New York: Routledge.

Arens, T., Hettlich, F., Karpfinger, C., Kockelkorn, U., Lichtenegger, K., & Stachel, H. (2015). *Mathematik*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. doi:10.1007/978-3-642-44919-2

Kirsch, A. (1987). *Mathematik wirklich verstehen*. Köln: Aulis Verlag.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Oldenburg, R. (2016). Stoffdidaktik konkret: Äquivalenz von Gleichungen. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, 101, 10–12.Fachmedien.

Vollrath, H.-J., & Weigand, H.-G. (2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. München: Elsevier GmbH.

Walz, G. (Ed.). (2017). *Lexikon der Mathematik Band 4 (2. Auflage)*. doi:10.1007/978-3-662-53500-4