

Entwicklung eines Konzepts zur angeleiteten Nacherfindung des Konvergenzbegriffs durch Studierende

Im Rahmen des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) wurde nach dem Design-Based-Research-Ansatz ein Konzept für eine Lernumgebung entwickelt, in der Studierende unter Anleitung die Definition der Folgenkonvergenz nacherfinden, bevor dieser Begriff in der Analysis-1-Vorlesung behandelt wird.

Schwierigkeiten im Zusammenhang mit dem Konvergenzbegriff

Sowohl aus Studien mit Schülerinnen und Schülern als auch aus solchen mit Studierenden ist bekannt, dass die Concept Images vieler Lernender zum Konvergenzbegriff nicht mit dem tatsächlichen Begriffsumfang übereinstimmen (vgl. Tall & Vinner, 1981). Roh (2005) berichtet von den eingeschränkten Vorstellungen, alle konvergenten Folgen seien monoton und die Folgenglieder konvergenter Folgen würden dem Grenzwert mit jedem Schritt näherkommen. Laut Davis und Vinner (1986) wird der Grenzwert von einigen Lernenden als obere oder untere Schranke angesehen, die nicht über- oder unterschritten werden dürfe. Auch berichten sie von der eingeschränkten Vorstellung, bei konvergenten Folgen werde der Grenzwert nicht erreicht beziehungsweise von keinem Folgenglied angenommen.

Entwicklung der Lernumgebung

Um Studierende einer Analysis-1-Vorlesung beim Aufbau eines breiten Concept Images zum Konvergenzbegriffs zu unterstützen, wurde ein Konzept für eine Lernumgebung entwickelt, erprobt, analysiert und überarbeitet. Die erste Version basiert auf einem Vorschlag für eine Unterrichtssequenz von Przenioslo (2005). In dieser sollen Schülerinnen und Schüler auf Basis vorgegebener Beispielfolgen und eines Nicht-Beispiels den Begriff der Konvergenz gegen 1 nacherfinden, bevor dieser im Unterricht behandelt wurde. Die Folgen sind derart vielfältig ausgewählt, dass sich auch solche konvergenten Folgen darunter befinden, die bei Vorliegen einer der bekannten eingeschränkten Vorstellungen zum Konvergenzbegriff nicht als konvergent angesehen werden würde. Dazu gehören Folgen, die den Grenzwert 1 annehmen; konvergente Folgen, die nicht monoton sind; Folgen, bei denen der Abstand zum Grenzwert 1 nicht (streng) monoton fallend ist; Folgen, deren Grenzwert weder eine obere noch eine untere Schranke darstellt, aber auch monotone Folgen, die den Grenzwert 1 nie annehmen. Bei dem Nicht-Beispiel handelt es sich um eine Folge, die neben dem Häufungspunkt 1 einen weiteren Häufungspunkt besitzt. Bei Bedarf können außerdem an

verschiedenen Stellen des Nacherfindungsprozesses Unterstützungsangebote eingesetzt werden. Im Vergleich zu dem Konzept von Przenioslo (2005) wurde eine Auswahl aus den Beispielfolgen getroffen, so dass die Vielfalt dennoch erhalten wurde. Die Unterstützungsangebote wurden nicht nur übersetzt, sondern auch an die Zielgruppe der Studierenden angepasst und um weitere Hilfestellungen ergänzt. Außerdem wurde eine konkrete Aufgabenstellung formuliert, welche die Studierenden zur eigenständigen Nacherfindung der Definition anregen soll.

Die erste Version des Konzepts wurde an der Universität Paderborn in Form eines Workshops als freiwilliges Zusatzangebot mit vier Gruppen aus je drei bis vier Studierenden durchgeführt. Dieser Workshop hat stattgefunden bevor der Konvergenzbegriff in der zugehörigen Analysis-1-Vorlesung behandelt wurde. Die Diskussionen der einzelnen Gruppen wurden qualitativ analysiert. Basierend auf den Ergebnissen wurden sowohl die (Nicht-)Beispielfolgen als auch die Formulierung der Aufgabenstellung sowie die vorbereiteten Unterstützungsangebote überarbeitet. Die derart entstandene zweite Version des Konzepts wurde anschließend an der Universität Kassel mit drei Gruppen aus je drei bis vier Studierenden erprobt. Bei der qualitativen Analyse der Diskussionen wurde gezielt untersucht, wie sich die Veränderungen des Konzepts ausgewirkt haben. Schließlich wurde das Konzept erneut überarbeitet.

Ergebnisse

In der durchgeführten Studie wurde unter anderem untersucht, wie die Erkenntnisprozesse der Studierenden bei der angeleiteten Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz verlaufen und welche Konsequenzen sich daraus für das Re-Design der Lernumgebung ergeben. Derartige Konsequenzen wurden für die Menge der vorgegebenen (Nicht-)Beispielfolgen, für die Formulierung der Aufgabenstellung und für die vorbereiteten Unterstützungsangebote formuliert. In diesem Beitrag soll auf ausgewählte Ergebnisse bezüglich der Aufgabenstellung eingegangen werden. Diese werden als Designprinzipien formuliert, die im Anschluss genauer erläutert werden.

Designprinzipien zur Formulierung der Aufgabenstellung:

- Die Definition soll auf Basis der vorgegebenen (Nicht-)Beispielfolgen entdeckt werden.
- Die Definition soll so präzise formuliert werden, dass sie als objektives, eindeutiges Entscheidungskriterium genutzt werden kann, und zwar prinzipiell auch für alle anderen Folgen.

- Formulierten Definitionen sollen jeweils dahingehend getestet werden, ob sie auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutreffen und auf das beziehungsweise die Nicht-Beispiel(e) nicht zutreffen.

Ein Ergebnis der retrospektiven Analysen ist, dass die Teilnehmenden des Workshops ihre Definitionsversuche nicht immer auf Basis der als (Nicht-)Beispiele vorgegebenen Folgen entwickelt haben, sondern teilweise auch basierend auf ihren Vorverständnissen zu Konvergenz. Dadurch wurden von manchen Studierenden „Definitionen“ formuliert, die nicht auf alle vorgegebenen Beispiele zugetroffen haben oder die auf das Nicht-Beispiel zugetroffen haben. Daher sollen die Teilnehmenden durch die Aufgabenstellung darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Nacherfindung auf Basis der vorgegebenen (Nicht-)Beispiele stattfinden soll. Dabei wird allerdings nicht erwartet, dass Vorverständnisse komplett ausgeblendet werden.

Des Weiteren hat sich gezeigt, dass viele Studierende mit von ihnen formulierten „Definitionen“ zufrieden waren, die nicht die nötige Präzision aufweisen, um sie als Entscheidungsregel nutzen zu können. Den Studienanfängerinnen und -anfängern ist diese Anforderung an eine mathematische Definition nicht unbedingt bewusst. Außerdem waren sie teilweise bei unpräzisen Formulierungen der Meinung, sie selbst könnten diese als Entscheidungsregel nutzen. Daher sollte deutlich gemacht werden, dass Definitionen als objektives Entscheidungskriterium dienen sollen, dass also jede Person damit zu derselben Entscheidung bezüglich des Konvergenzverhaltens einer Folge gelangen soll.

Zu einer idealtypischen Vorgehensweise bei der Nacherfindung würde gehören, dass Definitionsversuche jeweils systematisch an allen vorgegebenen Folgen getestet werden und die Formulierung anschließend gegebenenfalls überarbeitet wird. Ein Ergebnis der retrospektiven Analyse der Erkenntnisprozesse war jedoch, dass manchen Studierenden nur zufällig oder durch eine Intervention durch die Lehrperson aufgefallen ist, wenn ihre „Definition“ nicht auf alle vorgegebenen Beispielfolgen zutraf oder fälschlicherweise auch das Nicht-Beispiel umfasst hat. Da eine solche Systematik für einen erfolgreichen Nacherfindungsprozess von großer Bedeutung ist, sollen die Teilnehmenden explizit dazu aufgefordert werden.

Die folgende Aufgabenstellung erfüllt diese Designprinzipien:

Wir wollen die hochschulmathematische Definition der Konvergenz einer Folge gegen 1 entdecken. Der Begriff soll dabei so definiert werden, dass die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent gegen den Grenzwert 1 sind und die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent ist.

Versucht, eine gemeinsame Eigenschaft der Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (g_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht besitzt, durch eine einzige Bedingung auszudrücken. Diese Bedingung muss so gut formuliert werden, dass jemand, dem diese Formulierung gegeben wird, für jede beliebige Folge objektiv entscheiden und nachweisen kann, ob sie die Eigenschaft besitzt oder nicht. Jeder, dem diese Formulierung gegeben wird, soll damit zu derselben Entscheidung gelangen, ob eine Folge die Eigenschaft besitzt.

Wenn ihr der Meinung seid, eine geeignete Eigenschaft formuliert zu haben, prüft für alle vorgegebenen Beispielfolgen, ob sie die formulierte Eigenschaft besitzen. Prüft auch, ob die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Eigenschaft nicht besitzt. Falls etwas davon nicht der Fall ist, überarbeitet die formulierte Eigenschaft.

Diskussion

Die entstandene Formulierung der Aufgabenstellung umfasst einige verschiedene Aspekte, welche von Studierenden beim Lesen vermutlich nicht alle wahrgenommen und genauso aufgefasst werden, wie es beim Design der Lernumgebung intendiert war. Dennoch erscheint es sinnvoll, all diese Aspekte in der Aufgabenstellung beizubehalten. Falls eine Studierendengruppe eine „Definition“ formuliert, die eine der genannten Anforderungen nicht erfüllt, so kann die Lehrperson intervenieren und die Lernenden auf diese hinweisen. Wären die Anforderungen nicht in der Aufgabenstellung expliziert, so könnte eine derartige Intervention von den Studierenden als nachträgliche Veränderung der Aufgabenstellung und als Bruch des didaktischen Vertrags aufgefasst werden.

Die Lernumgebung als Ganzes scheint geeignet für eine angeleitete Nachfindung zu sein. Mit Unterstützung ist es den Teilnehmenden der Workshops jeweils gelungen, eine geeignete Definition zu formulieren.

Literatur

- Davis, R.B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.
- Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secondary school. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 71-93.
- Roh, K.H. (2005). *College students' intuitive understanding of the limit of a sequence and their levels of reverse thinking*. Dissertation, The Ohio State University, Columbus.
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.