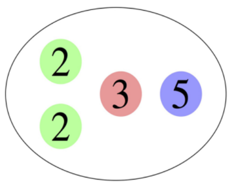
Antonella PERUCCA, Esch-sur-Alzette (Luxemburg)

Multimengen für die Arithmetik

Multimengen sind wie Mengen, in denen aber Elemente mehrfach vorkommen dürfen. Ein wichtiges Beispiel ist die Multimenge der Primfaktoren, die einer natürlichen Zahl durch die Primfaktorzerlegung zugeordnet wird. Der ggT und das kgV natürlicher Zahlen entsprechen dem Schnitt und der Vereinigung der Multimengen der Primfaktoren. Man kann mit Multimengen leicht verstehen, warum paarweise teilerfremde Zahlen so besonders sind, oder die etwas kompliziertere Formel für die Beziehung zwischen ggT und kgV mehrerer Zahlen nachvollziehen.

Multimengen sind eine Verallgemeinerung der Mengen: Man gewinnt an Flexibilität dadurch, dass die Elemente wiederholt werden können. Und in der Tat spielt die Vielfachheit eines Elements, d.h. die Anzahl der Male, mit der es vorkommt (ggf. 0, wenn das Element nicht vorkommt) eine zentrale Rolle. Ein wichtiges Beispiel aus der Arithmetik ist *die Multimenge der Primfaktoren* einer natürlichen Zahl. Dank des Fundamentalsatzes der Arithmetik kann man jeder positiven ganzen Zahl die Multimenge ihrer Primfaktoren zuordnen (die Zahl 1 entspricht der leeren Multimenge).



$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Abb.: Die Multimenge der Primfaktoren der Zahl 60.

Man hat dann eine Eins-zu-eins-Beziehung zwischen den positiven ganzen Zahlen und den endlichen Multimengen von Primzahlen. Mit jener Korrespondenz findet man für viele Begriffe der natürlichen Zahlen entsprechende Begriffe für Multimengen:

(1) Die *Gleichheit* zweier Zahlen entspricht der Gleichheit der Multimengen der Primfaktoren.

(2) Die *Teilbarkeit* zwischen zwei Zahlen entspricht der Inklusion zwischen den Multimengen der Primfaktoren. Dem Teiler gehört die Teilmultimenge und dem Vielfachen die Obermultimenge.

(3) Der *ggT* zweier oder mehrerer Zahlen entspricht dem Schnitt der Multimengen der Primfaktoren.

(4) Das *kgV* zweier oder mehrerer Zahlen entspricht der Vereinigung der Multimengen der Primfaktoren.

(5) Das *Produkt* zweier oder mehrerer Zahlen entspricht der Summe der Multimengen der Primfaktoren.

(6) Die *Menge der Primteiler* einer Zahl entspricht der reduzierten Grundmenge der Multimenge der Primfaktoren.

(7) Der Exponent der *größten Potenz einer Primzahl*, die eine Zahl teilt, entspricht der Vielfachheit jener Primzahl in der Multimenge der Primfaktoren.

(8) *Teilerfremde* bzw. *paarweise teilerfremde* Zahlen entsprechen disjunkten bzw. paarweise disjunkten Multimengen der Primfaktoren.

(9) Der *Quotient* zweier Zahlen entspricht der Differenz der Multimengen der Primfaktoren, wenn eine Zahl die andere teilt. Die Differenz der Multimengen der Primfaktoren zweier Zahlen entspricht im Allgemeinen der ersten Zahl geteilt durch den ggT.

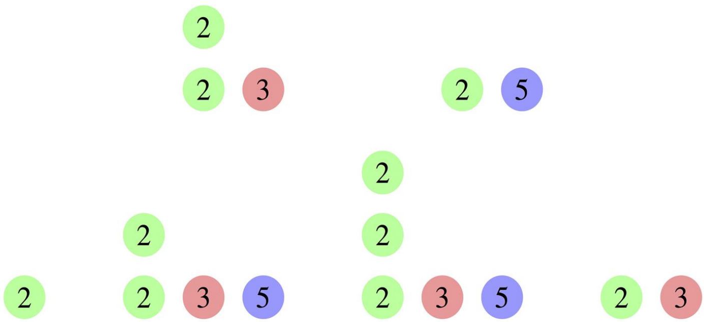


Abb.: Die zwei obigen Multimengen entsprechenden Zahlen 12 und 10. Die vier unteren Multimengen sind jeweils der Schnitt, die Vereinigung, die Summe, und die Differenz der zwei obigen Multimengen, und sie entsprechen folgenden Zahlen: ggT(12,10)=2; kgV(12,10)=60; 12·10=120; 12/ggT(12,10)=6.

Es reicht, das *Teilbarkeitskriterium* zu beweisen, weil die restlichen Eigenschaften aus jenem abgeleitet werden können:

Beweis des Teilbarkeitskriteriums: Betrachte eine positive ganze Zahl, und ihre Multimenge der Primfaktoren. Die leere Teilmultimenge entspricht der Zahl 1, die ein Teiler ist. Wenn man eine nichtleere Teilmultimenge betrachtet, und deren Elemente alle miteinander multipliziert, bekommt man einen Faktor der Zahl (da das Produkt sämtlicher Primfaktoren die Zahl selbst ist), und insbesondere hat man einen Teiler. Also bekommt man aus jeder Teilmultimenge einen Teiler. Umgekehrt, seien a und b positive ganze Zahlen, sodass b ein Teiler von a ist. Dann gibt es eine positive ganze Zahl c, sodass die Gleichheit $a=bc$ gilt. Schreibt man diese Zahlen als Produkt ihrer Primfaktoren, hat man auf der linken und auf der rechten Seite (wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung) dieselbe Multimenge von Primzahlen. Dann bilden die Primfaktoren von b (der Teiler) eine Teilmultimenge jener von a (das Vielfache). QED

Mit Hilfe von Multimengen kann man leicht verstehen, warum paarweise teilerfremde Zahlen (und nicht einfach teilerfremde Zahlen) ganz besondere Eigenschaften besitzen. In der Tat erkennt man sofort, dass paarweise disjunkte Multimengen (und nicht einfach disjunkte Multimengen) die entsprechenden Eigenschaften besitzen. Zum Beispiel kann die Vereinigung einiger Multimengen nur dann gleich ihrer Summe sein, wenn die Multimengen paarweise disjunkt sind. Also kann man nur für paarweise teilerfremde Zahlen erwarten, dass das kgV gleich dem Produkt ist.

Jetzt beweisen wir mit Multimengen die bekannte Formel, die besagt, dass das Produkt zweier positiver ganzer Zahlen gleich dem Produkt ihres ggTs und ihres kgVs ist:

$$a \cdot b = \mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b)\,.$$

Beweis der Formel: Die entsprechende Eigenschaft für Multimengen lautet: Die Summe zweier Multimengen ist gleich der Summe aus deren Schnitt und deren Vereinigung. Um diese Eigenschaft für alle endlichen Multimengen zu beweisen, kann man mit den Vielfachheiten eines Elements argumentieren (die Summe zweier Zahlen ist auch die Summe aus deren Minimum und deren Maximum). QED

Wer direkt mit den Exponenten der Primzahlen in der kanonischen Primfaktorzerlegung arbeiten möchte, der kann zumindest im Auge behalten, dass jene die Vielfachheiten der Primfaktoren sind. So oder so arbeitet man mit den Multimengen der Primfaktoren. Es gibt aber auch Beweise, die Primzahlen und Primfaktoren überhaupt nicht brauchen (man kann z.B. direkt zeigen, dass die Zahl $ab/\mathrm{kgV}(a,b)$ charakterisierende Eigenschaften des ggTs von a und b erfüllt).

Um die obige Formel zu verallgemeinern, sind Multimengen besonders hilfreich. Schreiben wir zunächst die Formel als einen Ausdruck des kgVs:

$$\mathrm{kgV}(a,b) = \frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a,b)}\,.$$

Für drei positive ganze Zahlen a, b, c gilt

$$\mathrm{kgV}(a,b,c) = \frac{a \cdot b \cdot c \cdot \mathrm{ggT}(a,b,c)}{\mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{ggT}(a,c) \cdot \mathrm{ggT}(b,c)} .$$

Diese Formel ist einfach die Übersetzung des Prinzipes von Inklusion und Exklusion für drei Multimengen:

$$A \cup B \cup C = \Big(A + B + C + (A \cap B \cap C)\Big) - \Big((A \cap B) + (A \cap C) + (B \cap C)\Big) .$$

Es gibt auch eine allgemeine Formel für das kgV von n Zahlen, nämlich die

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \sum_{\substack{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |J| \text{ ungerade}}} \bigcap_{j \in J} A_j \quad - \quad \sum_{\substack{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |J| \text{ gerade}, J \neq \emptyset}} \bigcap_{j \in J} A_j .$$

Übersetzung des Prinzipes von Inklusion und Exklusion für n Multimengen:

Didaktische Vorteile

Mathebegeisterte Schüler können (durch kurzen Austausch mit ihren Mathelehrern, oder z.B. in Schülerzirkeln) die Theorie der Multimengen als Verallgemeinerung jener der Mengen selbst entwickeln, und auch selbst die Begriffe der Teilbarkeitstheorie durch die Multimengen der Primfaktoren beschreiben. Sie können dann die allgemeine Beziehung zwischen ggT und kgV mehrerer Zahlen dank Multimengen verstehen.

Multimengen können mit kleinen Gegenständen (die sich z.B. in Farbe oder Form unterscheiden) veranschaulicht werden: Sie sind sozusagen Mathematik zum Anfassen. Um Multimengen von Primzahlen darzustellen, können die Gegenstände mit Primzahlen beschriftet werden, oder auch nicht (da die Wahl konkreter Zahlen manchmal von den grundlegenden Prinzipien ablenkt). Man kann dann mit den Händen Algorithmen der Arithmetik intuitiv durchführen. Und man kann Primzahlen als echte „Bausteine der natürlichen Zahlen“ benutzen.

Es gibt keine geeigneten Referenzen. Bei Bedarf wird didaktisches Material vom Autor produziert und auf https://www.antonellaperucca.net hochgeladen.