Stefan POHLKAMP, Aachen

Das Bildungspotenzial normativer Modellierung am Beispiel von Sitzverteilungsverfahren

„Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von *Aufklärung* durch sie zustande kommen kann“ (Winter 1995, S. 38, Herv. i. Orig.).

Mathematische Bildung ist also unvorstellbar ohne ein Nachdenken über das Spannungsfeld zwischen Mathematik und Wirklichkeit. Ein spezielles Verhältnis kommt bei der normativen Modellierung zum Ausdruck, die vor allem in gesellschaftlichen Kontexten typisch ist. Nach einer Charakterisierung ihrer mathematikdidaktischen Bedeutung wird im Folgenden vorgestellt, wie diese Modellierung im Rahmen eines Workshops zu Sitzverteilungen mit Schüler*innen behandelt werden kann.

Der Bildungswert normativer Modellierung

In jeder Modellierung werden Realität und Mathematik in Beziehung zueinander gesetzt. In vielen Fällen existiert zunächst ein lebensweltliches Phänomen, das mathematisch beschrieben wird, weshalb von deskriptiver Modellierung gesprochen wird (vgl. Förster 2000, S. 125). Davon lässt sich die normative Modellierung abgrenzen, bei der erst mithilfe von Mathematik Fakten geschaffen werden: „Im normativen Fall existiert der Sachverhalt *nicht ohne* Mathematik“ (Sjuts 2009, S. 195, Herv. i. Orig.); wie etwa beim Einkommenssteuertarif, der mathematisch festgelegt sein muss, bevor Steuern gezahlt werden können. Insbesondere ist eine normative Setzung weder eindeutig noch unveränderlich. Sie beruht auf Aushandlung sowie Einigung und kann widerrufen oder korrigiert werden. Quantifizierungen des Alltags wie die Armutsgrenze oder die Rente sind keine Naturkonstanten, sondern Produkte solcher normativen Modellierung. Es gilt, dieses Gestaltungspotenzial offenzulegen, damit Mathematik nicht mehr auf das Bild vom vermeintlich neutral beschreibenden Hilfsmittel reduziert wird.

Schon anhand einfacher Alltagssituationen können Grundzüge normativer Modellierung deutlich gemacht werden: Eine Taxifahrt kostet 12 Euro, wobei die zweite Person erst nach der Hälfte der Strecke zugestiegen ist, wie sollen die Kosten aufgeteilt werden (vgl. Sjuts 2009, S. 191)? Person 1 ist doppelt so viel gefahren und zahlt 8 Euro *oder* Person 1 übernimmt die erste Hälfte, teilt sich die zweite Hälfte und zahlt 9 Euro. Ohne Kenntnis der anderen Lösung erscheint jede Argumentation für sich nachvollziehbar und alternativlos. Durch den monetären Unterschied wird die persönliche Motivation deutlich. Das Aufzeigen von Alternativen und die Offenlegung von Interessen leisten einen Beitrag zur Mündigkeit der Lernenden. Dennoch sind normative Modellierungen im Mathematikunterricht wenig verbreitet (vgl. Hinrichs 2016, S. 26). Einzelne Unterrichtsvorschläge thematisieren unterschiedlich komplexe Kostenverteilungsprobleme des Alltags (vgl. z. B. Marxer / Prediger / Schnell 2010). Zu kurz kommen Themen der politisch-aufklärerischen Arithmetik, die sich besonders anböten (vgl. Winter 1995, S. 38). Ausgangspunkt des vorliegenden Beitrags ist die These, dass die normative Modellierung bei solchen gesellschaftlichen Streitfragen kaum diskutiert wird, obwohl dies ein Verständnis erleichtern würde. Eine Aufbereitung entsprechender Themen soll also exemplarische Erkenntnisse und Reflexionsmöglichkeiten zur mathematischen Perspektive im öffentlichen Diskurs ermöglichen. Durch das Entwickeln und Bewerten von Alternativmodellen sollen Lernende eigene Handlungsfähigkeit bei mathematischen und politischen Prozessen erleben, die sonst unhinterfragt bleiben.

Aufbau des Schülerworkshops zu Sitzverteilungsverfahren

Die Frage, wie Wählerstimmen in Parlamentssitze umgerechnet werden, gilt als Paradebeispiel für normative Modellierung (vgl. Förster 2000, S. 125). Bei einer Verhältniswahl mit proportionalen Sitzanteilen ist die gewünschte Ganzzahligkeit Motivation für eine normative Modellierung. Deren Notwendigkeit ergibt sich aus dem Unmöglichkeitssatz, nach dem es kein mathematisches Modell gibt, das allen demokratischen Ansprüchen gerecht wird: Man hat z. B. keine andere Wahl, als entweder das Auftreten von Verstößen gegen die Rundungsgrenzen oder gelegentliche Monotonie-Paradoxien in Kauf zu nehmen. (vgl. Balinski / Young 2001, S. 129).

Im Folgenden werden Materialien zum Thema „Sitzverteilungen" für einen Schülerworkshop vorgestellt, die in Ergänzung zu vorhandenen Unterrichtsideen (vgl. z. B. Jahnke 1998) explizit die normative Modellierung in den Blick nehmen. Sitzverteilungen werden nicht nur in ihren Funktionsweisen und Charakteristika beschrieben, sondern auch als normative Modelle bewertet und reflektiert. Dank digitaler Werkzeuge können verschiedene Sitzverteilungsverfahren an realen Wahlergebnissen simuliert werden. Modellkritik und -validierung beschränkt sich dann nicht nur auf Minimalbeispiele, was Schüler*innen authentischere Einblicke verschafft.

Bei der genetischen Entdeckung von Sitzverteilungen wird mehrmals der Modellierungskreislauf durchlaufen, sodass jeweils normative Setzungen getestet und beurteilt werden: Zuerst setzen sich die Schüler*innen mit der Proportionalität und der ganzzahligen Rundung im Spannungsfeld zwischen

Mathematik und deren lebensweltlichen Umsetzung auseinander. Dann können sie das Verfahren nach Hare/Niemeyer oft selbst formulieren. An realen Wahlergebnissen lässt sich dieses Modell überprüfen und kritisieren: Geringfügige Modifikationen des Bundestagswahlergebnisses von 2017 führen zur Entdeckung bekannter Paradoxien. Nach der Einführung von Divisorverfahren, z. B. nach Sainte-Laguë/Schepers, werden beide Typen von Sitzverteilungen bezüglich deren Modellannahmen, mathematischer Eigenschaften und politischer Konsequenzen diskutiert. Die Vergrößerung des Bundestags durch das neue Wahlgesetz – 2017 wurde die Idealgröße um 111 Mandate überschritten – bietet einen aktuellen Anlass für eine mathematische Untersuchung. In einer Simulation der letzten Bundestagswahl können Parameter wie z. B. die Anzahl der Direktmandate oder die Wahlbeteiligung variiert werden, um ihren Einfluss auf die Vergrößerung zu untersuchen. Einerseits können Schüler*innen so Ideen für ein eigenes Wahlgesetz formulieren, andererseits existiert damit ein Aufklärungsangebot zu einem in der Öffentlichkeit breit diskutierten Thema.

Potenzielle mathematisch-sachkundliche Erkenntnisse

Einlassungen zu Sitzverteilungen aus einer mathematischen Perspektive erscheinen im Hinblick auf die politische Praxis theoretisch: Denn im Wahlgesetz haben politische Festlegungen wie die 5%-Hürde größeren Einfluss auf die Parlamentszusammensetzung als das mathematische Sitzverteilungsverfahren. Eine Thematisierung im Rahmen normativer Modellierung birgt jedoch sowohl für das mathematische Verständnis als auch für den Anwendungskontext didaktisches Potenzial. Anhand von Sitzverteilungsverfahren scheinen drei Lernziele erreichbar: Erstens wird normative Modellierung als Entwicklung von Spielregeln für die Wirklichkeit charakterisiert und lässt sich vom deskriptiven Abbild der Realität unterscheiden. Im politischen Zusammenhang wird vor allem der Aspekt des fairen Aushandlungsprozesses bei verschiedenen Interessen betont. Zweitens erweitert sich das Mathematikbild von Schüler*innen, wenn innermathematisches Arbeiten nicht nur als Anwenden starrer Regeln, sondern auch als Gestalten eigener Festlegungen erfahren wird. Die Erfahrung eigener Entscheidungs- und Handlungsmöglichkeiten ist eine zusätzliche Motivation. Drittens führt die Uneindeutigkeit der innermathematischen Modellierung zu einem kritischen Bewusstsein für die oben genannten außermathematischen Bedingungen. Sowohl die Wahl eines bestimmten Sitzverteilungsverfahrens als auch die politischen Rahmenbedingungen sind menschliche Entscheidungen, die in die Modellierung einfließen.

Bezogen auf das aktuelle Wahlgesetz entdecken Schüler*innen, dass nicht nur die ehemaligen Überhangmandate die Ursache der Vergrößerung sind, wie es oft verkürzt dargestellt wird. Das vorgesehene Ausgleichsmodell reagiert auf jede föderale Verzerrung beim Verhältnis von Stimmen zu Mandaten. An diesem Beispiel konkretisiert sich das Demokratieverständnis: Braucht der Bundestag neben dem Proporz nach Parteien auch einen nach Bundesländern? Welche Auswirkungen sind als Folge einer möglichst genau umgesetzten Proportionalität akzeptabel? Die letzte Frage führt zu einer Grundsatzentscheidung, die dem ganzen Thema der Sitzverteilung innewohnt. Mit dem Konzept der normativen Modellierung können Schüler*innen als Bürger*innen eine mathematisch begründete Haltung in dieser Debatte entwickeln.

Fazit

Eine mathematische Argumentationsweise zu Sitzverteilungen stellt eine Bereicherung der öffentlichen Diskussion dar und ermöglicht eine staatsbürgerliche Bewertung. Neben dieser utilitaristisch verstandenen Aufklärung wird im Schülerworkshop ein methodologischer Schwerpunkt verfolgt (vgl. Henn 1997, S. 9). Mit dem Anliegen, Schüler*innen normative Modellierung bewusst zu machen, wird ein breiteres Verständnis für Anwendungen von Mathematik, insbesondere im gesellschaftswissenschaftlichen Bereich, ermöglicht. So definierte eine Schülerin bei einer Abschlussreflexion treffend: Normative Modellierung „legt Realität fest / stellt Regeln auf / wägt ab, da es keine eindeutig ‚gerechte' Lösung gibt".

Literatur

Balinski, M. L. / Young, H. P. (2001): *Fair Representation. Meeting the Ideal of One Man, One Vote*, 2. Aufl., Washington: Brookings Institution Press.

Förster, F. (2000): „Anwenden, Mathematisieren, Modellbilden", in: U.-P. Tietze et al. (Hrsg.): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1*, 2. durchges. Aufl., Braunschweig et al.: Vieweg, S. 121–150.

Henn, H.-W. (1997): „Mathematik als Orientierung in einer komplexen Welt", *Der Mathematikunterricht 43 (5)*, S. 6–13.

Hinrichs, G. (2016): „Kompetenztrainings zum mathematischen Modellieren von Jahrgang 5 bis 12", *Der Mathematikunterricht 62 (6)*, S. 24-37.

Jahnke, T. (1998): „Das Thema Wahlen im Mathematik- oder Projektunterricht", *Mathematik lehren 88*, S. 4-5.

Marxer, M. / Prediger, S. / Schnell, S. (2010): „Wie verteilen wir Müllgebühren? Bildungswirksame Erfahrungen beim Entwickeln und Diskutieren normativer Modellierungen", *Praxis der Mathematik in der Schule 36*, S. 19–25.

Sjuts, J. (2009): „Mit Mathematik Wirklichkeit schaffen", in: T. Leuders et al. (Hrsg.): *Mathemagische Momente*, Berlin: Cornelsen, S. 190–197.

Winter, H. (1995): „Mathematikunterricht und Allgemeinbildung", *Mitteilungen der GDM 61*, S. 37–46.