Toni REIMERS, Halle a. d. S.

Samuel Loyds Schleifstein-Rätsel aus historischer und digitaler Perspektive

The Grindstone Puzzle von Samuel Loyd

Das mathematische Rätsel um den Schleifstein (engl. *grindstone*) wurde 1914 in *Cyclopedia of Puzzels* von dem Sohn des US-amerikanischen Spiele-Erfinder und Rätselspezialisten – der besonders für seine Schach-Probleme berühmt ist – Samuel Loyd (*1841, †1911) erstmals außerhalb von Zeitungen veröffentlicht. In der deutschen Übersetzung des von dem US-amerikanischen Wissenschaftsjournalisten Martin Gardner (*1914, †2010) herausgegebenen Buches *Sam Loyd – Mathematische Rätsel und Spiele* lautet die Aufgabe wie folgt:

„Es wird erzählt, da⟨ss⟩ sich einst zwei ehrenwerte Syrer zusammentaten und ihre ganzen Ersparnisse in einen Topf warfen, um sich davon einen Schleifstein zu kaufen. Da sie ein paar Meilen voneinander entfernt wohnten, kamen sie überein, da⟨ss⟩ der Ältere von ihnen den Schleifstein solange behalten sollte, bis er genau zur Hälfte abgewetzt war, und dann sollte ihn der andere bekommen. Der Schleifstein hatte einen Durchmesser von genau 22 Zoll, mit einem $3\frac{1}{7}$ Zoll großen Loch in der Mitte, das der Befestigung diente, geradeso wie im Bild zu sehen ist. Welchen Durchmesser mu⟨ss⟩ der Stein haben, wenn der andere ihn erhält⟨?⟩“[1]

Zur Aufgabe

Beide *Syrer* wollen den gleichen Nutzen aus ihrer Anschaffung ziehen, daher ist die – unter dem Gesichtspunkt der Fairness – gemachte Formulierung, wonach der andere den Schleifstein bekomme, wenn dieser „genau zur Hälfte abgewetzt“ sei, zwar zwingend, aber aus Sicht der mathematischen Modellierung jedoch nicht direkt einsichtig. Was in diesem Kontext als *fair* erachtet werden möge, ist im Plenum auszuhandeln. Um vom realen Problem zum mathematischen Modell zu kommen, ist es somit wichtig Entscheidungskriterien zu formulieren:[2] Wann ist der Schleifstein zur Hälfte abgewetzt?

Eilfertige Lernende mögen rasch die Halbierung des Durchmessers anbieten und implizieren damit bereits eine enorme Abstraktion, ist doch der Schleifstein ein zentral-durchbohrter krumm-begrenzter Gegenstand. Wird dieser

[1] cf. Gardner, p. 27.

[2] cf. Blum, pp. 9 sqq.

als gerader Kreishohlzylinder – und damit als räumlicher geometrischer Körper – aufgefasst, so ist dessen äußere Mantelfläche – welche eine ebene Rechtecksfläche ist – genau die Oberfläche, an welcher gewetzt wird. Durch Gebrauch verringert sie sich in linearer Abhängigkeit vom äußeren Durchmesser. Das Problem kann also, wie die Abbildung auch suggeriert, in der ebenen Geometrie – nun allerdings bezüglich der Grund- bzw. Deckfläche – behandelt werden. Diese, bei gleichmäßiger nicht einseitiger Nutzung, kongruenten ebenen Flächen sind Kreisringe. Der Schleifstein ist also, diesen Überlegungen folgend, „genau zur Hälfte abgewetzt", wenn sich die Fläche des Kreisringes halbiert hat.

Aufgrund der Praktikabilität und Sicherheit des Materials kann der zweite *Syrer* den Stein nicht bis auf das Aufhängeloch abwetzten. Diese praktische Sperrschicht möge im Folgenden aber bereits bei dem *Loch*durchmesser berücksichtigt sein. Dem Umstand, dass der Zweite für den gleichen Wetzeffekt den Stein öfter rotieren muss und somit mehr Arbeitskraft investieren muss, soll an dieser Stelle hinsichtlich der Fairness dadurch Rechnung getragen sein, dass der Ältere das Arbeitsmittel als Erster erhält.

Zur Problemlösung

Es seien $D := 22''$ der äußere Durchmesser des Schleifsteins, $\delta := {}^{22}/_{7}{}''$ der *Loch*durchmesser und d der gesuchte Durchmesser des *halbabgewetzten* Schleifsteins.

Formal ist die Aufgabe damit gelöst, dass wenn $A := \frac{\pi}{4}(D^2 - \delta^2)$ die Kreisringfläche beim Kauf bezeichne und bei Übergabe $\frac{A}{2} = \frac{\pi}{4} d^2$ gilt.

Dann ist schließlich $d^2 = \frac{1}{2}(D^2 + \delta^2)$ und somit $d = 15\, {}^{5}/_{7}{}''$.

Konstruktiv gestaltet sich die Problemlösung mehrschrittiger. Zunächst ist der Kreis K, mit dem Durchmesser D zu zeichnen, auf dessen Peripherie ein beliebiger Punkt T gewählt und durch diesen und O die Gerade h_1 gezeichnet wird. Der Kreis L, der das Schleifsteinloch modelliert, wird analog zu K mit dem Durchmesser δ und dem Mittelpunkt O gezeichnet. Durch Konstruktion der zu h_1 senkrechten Gerade h_2 durch O besteht die Schnittmenge von K sowie den Geraden h_1 und h_2 aus vier Punkten $A_1 := T$, A_2, B_1 und B_2, welche aufgrund der Konstruktion über D nach Satz des Thales ein in K einbeschriebenes Quadrat $A_1A_2B_1B_2$ formieren. Durch O wird die Mittelsenkrechte m zu o.B.d.A. $\overline{A_1B_2}$ konstruiert, deren Schnittpunkt P mit O den Radius $|\overline{OP}|$ des in $A_1A_2B_1B_2$ einbeschriebenen Kreises k liefert. Nach dem Satz des Pythagoras ist leicht einzusehen, dass $\sqrt{2} \cdot |\overline{OP}| = D$ gilt, womit k das Halbe Maß an Fläche wie K einschließt. Auf analoger Weise wird der

Kreis l – ebenfalls mit Mittelpunkt O – halben Flächeninhalts zu L konstruiert. Es sei $E \in h_1 \cap l$ ein Schnittpunkt von h_1 und l sowie $H, G \in h_2 \cap k$ die Schnittpunkte von h_2 und k. O.B.d.A. wird eine zu h_2 senkrechte Gerade s durch G konstruiert, die den Strahl f von H durch E im Punkt S schneide. Nach Konstruktion ist s parallel zu h_1.

Über die Strahlensatzbeziehung $\frac{|\overline{HO}|}{|\overline{EO}|} = \frac{|\overline{GH}|}{|\overline{GS}|}$ ist damit $\overline{GS}$ genau so lang wie der Durchmesser von l. Die Flächenmaßzahl des Kreises c durch S mit Mittelpunkt O abzüglich der von L ist halb so groß wie die von K verringert um der von L. Dies ist wieder über den Satz des Pythagoras mit $|\overline{OS}|^2 = |\overline{GO}|^2 + |\overline{GS}|^2$ einzusehen. Die beiden umrahmten Gleichungen sind äquivalent.

Didaktische Kommentare

Der Schlüssel zu des Rätsels Lösung ist in zweierlei Hinsicht die non-triviale mathematische Modellierung: zum einen um das Entscheidungskriterium zu formulieren, zum anderen um die eigentliche Rätselfrage zu beantworten. Was auf zwei (geometrische) Weisen möglich ist.

Unter Voraussetzung einer homogenen Dichte – was aber aus Gründen des fairen Nutzens zwingend ist – ist das Problem fächerübergreifend auch über das Wiegen der Schleifsteinmasse lösbar.

Während der Kern des formalen Lösungswegs *nur* in der transfermäßigen Anwendung der Kreisscheibenflächenformel und algebraischer Termumformung liegt, potenziert sich der didaktische Mehrwert durch das Beschreiten des konstruktiven Lösungswegs und macht das eigentliche Argument, nämlich die Anwendung des Satzes des Pythagoras, erst sinnfällig und zeichnet sich durch die vielseitige Nutzung klassischer Sätze der ebenen Geometrie aus.

Die Lösungsaufbereitung mit dynamischen Geometrieprogrammen erschöpft sich nicht nur in der Konstruktion eines Zirkels, in dessen Folge der Kreis c als Spur von Punkt S generiert werden kann, sondern ermöglicht u.a. erst die Visualisierung über realistische Intervalle für δ in Abhängigkeit von D, wenn diese mittels Schieberegler als nicht statische Größen aufgefasst werden, womit *des Rätsels Lösung* auf die Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* erweitert werden muss.

Als historisches Mathematikrätsel erfüllt es offensichtlich die übliche Impulsfunktion beispielsweise als Motivation für den Einstieg in Kreisplanimetrie,[3] wobei die Deklaration als *Rätsel* statt *Aufgabe* bereits ihr übriges tut. Die Lösung des Rätsels diente dann der Anwendung von Strahlensatz, Thales, Pythagoras & Co. Wird jedoch der Fokus auf die Kreisflächenhalbierung gelegt, so dient sie gleichsam als (eine) historische Antwort auf eine logisch-genetische Frage aus der Gegenwart.[4] Aufgefasst als historische Quelle, treten die Lernenden in einen inneren Dialog; das Rätsel dient als Interpretationsgrundlage zur Anwendung der historisch-hermeneutischen Methode.[5]

Schließlich ist, das zeitgenössisch-stereotype Spottbild der (*semitischen*) „Syrer“ in der Originalillustration von 1914 – einer Hochzeit kulturimperialistischen Chauvinismus‘ – zum (aktuellen) Anlass zur Werteorientierung im Mathematikunterricht als übergeordnetem Bildungsziel im demokratischen Staat als Organisation einer offenen Gesellschaft zu nehmen.

Literatur

Blum, W. (2006): Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht – Herausforderung für Schüler und Lehrer. In: Büchter, A. et.al. (ed.) Realitätsnaher Mathematikunterricht – vom Fach aus und für die Praxis. Hildesheim, pp. 8-23.

Gardner, M. (2005): *Sam Loyd – mathematische Rätsel und Spiele*. Köln.

Glaubitz, M. (2010): Mathematikgeschichte lesen und verstehen. Eine theoretische und empirische Vergleichsstudie (Diss.). Duisburg-Essen.

Lindner, F. W. (1808): Über die historisch-genetische Methode. Ein Beitrag zur Verbesserung und Vereinfachung des Unterrichts sowohl in höhern, als niedern Schulen, als Einladungsschrift zu den von Ostern 1808 an zu haltenden sowohl theoretischen, als auch praktischen, pädagogischen Vorlesungen. Leipzig.

Wagenschein, M. (1968): Verstehen lehren. Genetisch-Sokratisch-Exemplarisch. Weinheim & Basel.

[3]cf. Lindner, p. 84

[4]cf. Wagenschein, p. 90

[5]cf. Glaubitz, pp. 61 sqq.