Julia REY & Michael MEYER, Köln

Die Beziehung von Theorie und Empirie innerhalb mathematisch-experimenteller Methoden

1. Einleitung

> „Die Vernunft muß mit ihren Prinzipien, nach denen allein übereinkommende Erscheinungen für Gesetze gelten können, in einer Hand, und mit dem Experiment, das sie nach jenen ausdachte, in der anderen, an die Natur gehen, zwar um von ihr belehrt zu werden, aber nicht in der Qualität eines Schülers, der sich alles vorsagen läßt, was der Lehrer will, sondern eines bestallten Richters, der die Zeugen nötigt, auf die Fragen zu antworten, die er ihnen vorlegt." (KANT KrV BXIII)

Im Zitat von KANT werden zwei Komponenten des Experimentierens eröffnet: etwas Theoretisches – benannt als Vernunft – zur Verifikation von Gesetzen und die Natur als Quelle für Erfahrungen. KANT formuliert damit ‚die experimentelle Methode' der Naturwissenschaften als ein Zusammenwirken dieser beiden Komponenten.

In diesem Beitrag wird das Zusammenspiel von *Theorie* und *Empirie* beim Nutzen der experimentellen Methode in den Naturwissenschaften und damit einhergehend ‚die experimentelle Methode' für den Mathematikunterricht konkretisiert, um daran anschließend zu diskutieren, ob und wie sich diese Komponenten innerhalb der Mathematik wiederfinden.

2. Empirie und Theorie innerhalb der experimentellen Methode

Die Zuweisung von *Theorie* und *Empirie* werden in den Naturwissenschaften als von der Zielsetzung bzw. den Fragen abhängig gesehen: So werden Fragen an die Natur, also an reale Objekte, gestellt (s. u. a. DEMTRÖDEL, 2015, S. 2). Konkret stellt die Chemie beispielsweise Fragen an „Stoffe, ihre Eigenschaften und Umwandlungen" (REINERS, 2017, S. 25). In der Chemie sind die beobachtbaren Stoffe dasjenige, was *empirisch* ist, was erfahrungszugänglich ist (EBD., S. 25 f.). Die finale Antwort zur Frage an die Natur bedarf hingegen allgemeiner Aspekte – d. h. auf das Beispiel der Chemie bezogen, Aussagen über alle Stoffe einer Klasse – und in dieser Allgemeinheit wird das *Theoretische* gesehen (EBD.).

Innerhalb der experimentellen Methode kann das Empirische also in dem Handeln mit realen Objekten erkannt werden – mit etwas, was erfahrbar ist. Hierzu lassen sich verschiedene Momente des Nutzens von Theorie rekonstruieren: Ausgehend von einer Frage an die Natur wird eine Hypothese generiert. Hypothesen können als sich noch zu bewährende Erklärungen betrachtet werden, die sowohl aus der Theorie als auch aus vergangenen Erfahrungen heraus resultieren können (STORK, 1979, S. 57). Damit stehen Hypothesen in einem Begriffspaar zum Handeln, aber auch zur Theorie, da sie sowohl aus ihr generiert werden als auch einer (folgenden) Erweiterung derselben dienen sollen. STORK (1979) bezeichnet Hypothesen u. a. entsprechend als „theoretische Aussagen erster Stufe“ (S. 57). Anschließend wird ein Experiment geplant, das reproduzierbar und kontrollierbar sein soll (PFEIFER ET AL., 2002, S. 90). Dazu bedarf es wiederum Theorien über Werkzeuge sowie Erfahrungen über das Verhalten realer Objekte, um Störeffekte zu eliminieren. Das anschließende Experiment kann nicht ohne Beobachtungen stattfinden, da die Beobachtungen den Theoriebezug einbringen: Eine Beobachtung dient dazu, zuerst Gesehenes zu kategorisieren und anschließend nach relevanten Inhalten zur Beantwortung der Fragestellung hin zu selektieren. PFEIFER ET AL. (2002) sprechen hier auch von einer „**theoriefundiert[en]**“ Beobachtung (S. 91). Die Beobachtungen werden anschließend gedeutet. Die Deutung – als ein zentraler Theorieakt innerhalb der Methode – kann wiederum die Möglichkeit zur Theorieerweiterung liefern.

Wird diese Methode auf den Mathematikunterricht übertragen, eröffnen sich zentrale Fragestellungen für diesen Beitrag: 1. Inwiefern ist ein Analogon für die Mathematik zum naturwissenschaftlichen Verständnis von *Theorie* und *Empirie* beschreibbar? 2. Wie kennzeichnet sich ein Zusammenspiel dieser Komponenten innerhalb einer mathematisch-experimentellen Methode?

3. Theorie und Empirie innerhalb einer mathematisch-experimentellen Methode

Einen ersten Ausgangspunkt zur Betrachtung empirischer Elemente in der Mathematik liefert STEINBRING (2017):

> „Das was mit den kommunikativen mathematischen Elementen und Mitteln (den Zeichen, Symbolen, Diagrammen, Formeln usw. usf.) benannt bzw. bezeichnet wird, das sind nicht wie im Alltag Dinge und Ereignisse der realen Welt. Nein, es sind letztlich Beziehungen und Strukturen, auf die die mathematischen semiotischen Mittel abzielen.“ (S. 26)

Aus mathematischer Perspektive eröffnet der gewünschte Vergleich zum naturwissenschaftlichen Vorgehen die Notwendigkeit der Klärung dessen, wie etwas Empirisches von Bedeutung für die Mathematik sein kann.

Etwas Empirisches im Mathematikunterricht bilden sicherlich reale Gegenstände, wie z. B. Türme aus Bauklötzen, deren Verschiebung zum Erkennen neuer mathematischer Zusammenhänge bzw. Beziehungen dienen kann (s. Operatives Prinzip). Auch kann von den konkreten Türmen abstrahiert werden, so dass die Länge der Türme einen variablen Charakter erhält, und dennoch mit ihnen hantiert werden kann. Im Geometrieunterricht sind typische Übungen auch kopfgeometrischer Art: Würfel werden im Kopf z. B. gestapelt und umgebaut. Gedachte Objekte werden reale Eigenschaften zugeschrieben. Somit sind die Objekte selbst keine realen Türme. Damit wären zumindest folgende Ebenen ‚empirischen‘ Handelns denkbar:

1. Ebene: Relationen von und mit realen Objekten (z. B. Bauklötze)
2. Ebene: Relationen von und mit abstrahierten Objekten (z. B. Variablen)
3. Ebene: Relationen von und mit als real behandelten, allerdings rein gedanklichen Objekten, die zum Zeitpunkt der Handlung keine visuelle Referenz besitzen (z. B. Kopfgeometrie)

Um diese in erster Annäherung unterschiedenen ‚empirischen' Gegenstände mathematischen Handelns auch in der Realität nachzuzeichnen, wird nun auf die zweite Forschungsfrage des Beitrags eingegangen und erste Ergebnisse aus einer empirischen Studie präsentiert. In dieser wurden u. a. 24 LehramtsstudentInnen mit dem Fach Mathematik des dritten Bachelorsemesters Fragen aus der Mathematik vorgelegt. Eine Frage ist folgende gewesen:

Unter welchen Bedingungen schneiden sich die Mittelsenkrechten eines Dreiecks in der Mitte einer Dreiecksseite?

Zur Bearbeitung der Frage können beispielsweise (konkrete) Dreiecke genutzt oder das Verhalten von Schnittpunkten von Mittelsenkrechten untersucht werden. Es wäre möglich auf verschiedenen Ebenen von Empirie zu handeln. Die Studentinnen Mia und Regina beginnen die Bearbeitung der Aufgabe nach dem Lesen wie folgt (geglättetes Transkript):

1 Interviewerin	Habt ihr schon irgendwie eine Vermutung oder so?
2 Regina	*(leise)* Gleichschenklig, aber ich weiß nicht warum.
3 Interviewerin	Ja.
4 Mia	Ja das vermute ich ehrlich gesagt auch.
5 Interviewerin	Ja?
6 Mia	Also wenn sozusagen der gegenüberliegende Winkel ungefähr gegenüber dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite liegt.

Regina und Mia zeichnen anschließend jeweils ein gleichschenkliges Dreieck mit Mittelsenkrechten und bewerten ihre Vermutung:

7 Regina	(*leise)* Klappt nicht. *(liest leise erneut die Aufgabe vor)* Aber das muss schon die Dreiecksseite sein von dem Dreieck sein, was ich auch konstruiert hab *(guckt zur I)*?
8 Interviewerin	Ja.
9 Regina	Aber die schneiden sich ja hier *(zeigt auf ihren Schnittpunkt)* also müsste da jetzt eine Seite liegen eigentlich. *(2 sec)* Ne, so funktioniert das auch nicht *(schüttelt den Kopf, lacht)*.
10 Mia	*(leise)* Ah das wird wirklich nicht funktionieren. *(lauter)* Ha. Okay das funktioniert schon mal nicht *(kreuzt ihre Zeichnung durch)*. *A*lso kein gleichschenkliges Dreieck *(schreibt neben ihre Skizze „kein gleichschenkliges Dreieck")*.

Mia schafft in Turn 4 und 6 den Rahmen einer experimentellen Methode, indem sie eine begründete Hypothese äußert, wohingegen Regina scheinbar eher explorativ (Turn 2) vorgehen und erstmal unbegründet ein gleichschenkliges Dreieck zeichnen möchte (zur Unterscheidung s. REY & MEYER, 2017). In Turn 9 scheint dann auch Regina eine experimentelle Methode zu initiieren: Sie stellt die Hypothese auf, dass an die Stelle des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten die dritte Dreiecksseite gelegt werden müsste. Die Erfahrung durch die erste Zeichnung ermöglicht eine begründete Hypothese über die Lage der Dreiecksseite. Um dies zu überprüfen führt sie kein weiteres Experiment händisch durch.

Was sich in dieser kurzen Szene zeigt, sind zum einen die unterschiedlichen Aspekte der Nutzung von Theorie und zum anderen auch das Zusammenspiel der empirischen Elemente: Mia nutzt zur Hypothesenbildung eine Eigenschaft gleichschenkliger Dreiecke, die für die besondere Lage des Schnittpunkts verantwortlich sein könnte. Beide Studentinnen zeichnen konkrete gleichschenklige Dreiecke (1. Ebene), wobei diese Konkretheit von Regina aufgehoben wird, sobald sie eine Dreiecksseite als eine beweglich nutzt und damit experimentiert (3. Ebene).

4. Fazit und Ausblick

Es lässt sich vermuten, dass das Zusammenspiel von *Theorie* und *Empirie* abhängig davon ist, welche Fragen gestellt werden. Bei Regina scheint das Objekt gedanklich zu sein, insofern die Basisseite des gleichschenkligen Dreiecks bewegt wird. Die Deutung für die Klasse gleichschenkliger Dreiecke ist mit dem gedanklichen Handeln bereits vollständig vollzogen.

Die Szene verdeutlicht bereits ansatzweise das potentiell komplexe Zusammenspiel von theoretischen und empirischen Elementen beim Experimentieren in der Mathematik. Das dahinterliegende Potential für das Lernen von Mathematik –ausgehend von Theorie, angeleitet durch das Handeln an Objekten und letztlich wieder eingebunden in die Theorie – herauszuarbeiten, wird Gegenstand weitergehender Analysen sein.

Literatur

DEMTRÖDER, W. (2015). *Experimentalphysik 1.* (7. Aufl., Bd. 1) Berlin: Springer.

KANT, I. (2010). *Kritik der reinen Vernunft*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

PFEIFER, P., LUTZ, B., & BADER, H. J. (2002). *Konkrete Fachdidaktik Chemie*. München: Oldenbourg Schulbuchverlag.

REINERS, CH. S. (2017). *Chemie vermitteln.* Berlin: Springer.

REY J., & MEYER M. (2018). Naturwissenschaftliche Vorgehensweisen im Mathematikunterricht. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2018 (S. 1483 – 1486).* Münster: WTM-Verlag.

STEINBRING, H. (2017). Von Dingen, Worten und mathematischen Symbolen. In A. S. STEINWEG (Hrsg.), *Sprache und Mathematik (S. 25 – 40)*. Bamberg: University of Bamberg Press.

STORK, H. (1979). Zum Verhältnis von Theorie und Empirie in der Chemie. *Der Chemieunterricht, 10(3),* 45-61.