Marieke ROSKAM, Oldenburg

Multiplikative Strukturen verstehen - Einzelfallanalysen von Sechstklässlern über argumentative Auseinandersetzungen im Kontext: Primzahlen als kleinste Bausteine der natürlichen Zahlen

Forschungsanliegen und theoretische Einbettung

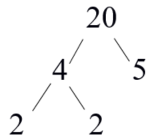
Mathematische Objekte sind schwer zu erfassen, da sie rein gedanklicher Natur sind (Sfard, 1991). Abstrahieren und Erfassen von mathematischen Objekten als gedankliche, theoretische Konstrukte sind daher für viele Lernende schwer vorstellbar (Arcavi, 1994, 2005; Duval, 2006; Peirce nach Hoffmann, 2005; Sfard, 1991). Folglich stellt insbesondere die Einführung in die Algebra eine große Herausforderung dar. Nach Sfard und Linchevski (1994) besteht einerseits eine Hürde im Deuten der Buchstabenvariable und andererseits im Erkennen symbolischer Formeln sowohl als Prozess (der Rechenweg) wie auch als Ergebnis (das Ergebnis der Rechnung). Studienergebnisse zeigen, dass viele Lernende ein sehr geringes Verständnis von arithmetischen Beziehungen und Strukturen besitzen, welche eine notwendige Voraussetzung zum Verständnis formaler algebraischer Repräsentationen darstellt (Bauersfeld, 1983; Kieran, 1990; Krämer, 1988). Selbst nach jahrelanger Übung verstehen SchülerInnen die Semantik der Algebra häufig nicht (Arcavi, 1994, 2005). Es existieren bereits viele Studien und Arbeiten, welche Leistungen und Defizite von Lernenden in diesem Bereich aufzeigen (Malle, 1993), allerdings betrachten wenige Arbeiten die Denkentwicklungen der SchülerInnen (Berlin, 2010). Daher ist es Ziel dieser Studie Erkenntnisse zu gewinnen, wie SchülerInnen ein Strukturverständnis entwickeln und wie dieses angeregt werden kann, insbesondere im Unterricht.

Design der Studie

Der Aufbau der Studie (siehe Abb.1) orientiert sich am Design Research nach Akker&Gravemeijer&McKenney&Nieveen (2006).

Abb. 1: Ablauf der Studie (zyklisch) Konzeption - Datenaufnahme – Analyse

Dafür sind zwei Doppelstunden für Sechstklässler konzipiert worden, in der SchülerInnen zum Argumentieren angeregt werden im Kontext: Primzahlen als kleinste Bausteine der natürlichen Zahlen. Hierbei steht insbesondere das Denken in multiplikativen Strukturen im Vordergrund. Die Lernumgebung dient dabei als strukturell reichhaltige Argumentationsbasis für arithmetische Beziehungen und Strukturen. In der ersten Doppelstunde stellt der Zerlegungsbaum den Einführungskontext von Primzahlen dar. Es werden zwei Darstellungsmöglichkeiten (siehe Abb. 2) eingeführt: Primzahlen als Blätter des Zerlegungsbaums sowie als Faktoren in Produktnotation (in der Primfaktorzerlegung). Der Zerlegungsbaum dient dabei als intuitiver Zugang, um den Umgang der Produktnation mehrerer Faktoren anzuregen.



$$20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$$

Abb.2: Beispiel der Zahl 20 als Zerlegungsbaum (links) und in Produktnotation (rechts)

Der Schwerpunkt der nachfolgenden Unterrichtsstunde liegt im Umgang mit der Produktnotation. Dabei wird insbesondere auf die Vernetzung zur Teilbarkeit von Zahlen sowie die Umformungsgleichheit verschiedener Produktnotationen eingegangen. Dies fokussiert das Denken im Operieren mit Diagrammen (hier: der Produktnotation) und soll somit zum diagrammatischen Schließen anregen (Dörfler, 2006).

Im Anschluss an die Unterrichtsreihe wurden Interviews mit Schülerpaaren durchgeführt. Während des Interviews sind die SchülerInnen dazu aufgefordert worden, verschiedene Aussagen über Teilbarkeiten zu begründen, beispielsweise „*Wenn eine Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist, dann ist diese Zahl auch durch 6 teilbar*“.

Die Erhebung erfolgte in halbstandardisierten Interviews und unter Anwendung der Methode des lauten Denkens, sodass festgelegte Leitfragen, aber auch spontane Gedanken und Impulse der SchülerInnen erfahrbar werden (Niebert & Gropengießer, 2014; Sandmann, 2014). Um soziale Argumentationen zu ermöglichen und ein Beweisbedürfnis seitens der Lernenden zu erzeugen, wurden die Interviews paarweise durchgeführt (Miller, 1986). In der Pilotierung sind 6 SchülerInnen befragt worden. Im ersten Teil der Datenaufnahme 16 und im zweiten Teil 10 SchülerInnen. Ein Interview umfasste einen zeitlichen Rahmen von ca. 45 Minuten.

Die anschließende Analyse besteht vorrangig in der Rekonstruktion von Gedankengängen der SchülerInnen aus epistemischer Perspektive (u.a. mithilfe von „Concepts-in-actions“ nach Vergnaud, 1996).

Erste Ergebnisse

Erste Einzelfallanalysen zeigen, dass SchülerInnen multiplikative Strukturen aus zwei verschiedenen Perspektiven betrachten: dem *Zerlegen* und dem *Konstruieren* einer Zahl mittels multiplikativer Bausteine. Die Bausteine bestehen dabei aus Primzahlen und/oder Teilern der Zahl. Die Perspektiven können auf verschiedenen Ebenen eingenommen werden: zwischen konkreten und allgemeinen Argumentationen sowie über unterschiedliche inhaltliche Vorstellungen.

Ein Beispiel für das Zerlegen zeigt Schüler Elias: *„[...] er hat viele Rechenwege gesucht, um die Zahl 12 durch 2 und 3 zu zerlegen*“. Hier wird bereits explizit von dem Schüler selbst das Wort „*zerlegen*“ genutzt, in vorherigen Ausführungen beschreibt er es über die Teilbarkeit einer Zahl, wobei die Vorstellung vermutlich auf einen Zerlegungsbaum beruht, welches sich an verschiedenen Ausführungen in seinem Transkript bemerkbar macht, beispielsweise „*die 2 kann man durch 6 teilen*“. Diese Äußerungen sind häufig sprachlich in umgekehrter Logik zur Teilbarkeitsbeziehung.

Ein Wechsel dieser Perspektive zeigt Schülerin Henrike. Sie beginnt zu konstruieren als eine andere Schülerlösung über verschiedene Umformungsgleichheiten in Form von Produktnotationen beschrieben und interpretiert wird. Sie führt aus: „[…] *Aber, wenn beide Zahlen (2 und 3) drin vorkommen, kann man es automatisch durch 6 teilen, weil 2·3=6 ist und dann kann man das wieder malrechnen*“ und präzisiert ihre Aussage im Gesprächsverlauf. Hier scheint sie ihre Vorstellung des Zerlegens im Zerlegungsbaum zu erweitern, um in der Produktnotation aus 2 und 3 eine 6 zu erzeugen. Weitere Ausführungen ihrerseits deuten darauf hin, dass mit „*wieder malrechnen*“ die 2 und 3 gemeint sind, die wieder eine 6 erzeugen.

Des Weiteren zeigt sich ein Zusammenhang zwischen der Perspektive des Zerlegens bzw. des Konstruierens und der Logikauffassung der SchülerInnen, woraus folgende Hypothesen generiert werden: Können beide Perspektiven bewusst wahrgenommen werden, fällt es leichter die Logikrichtungen der „Wenn, dann“-Aussagen voneinander zu trennen. Um die unterschiedlichen Perspektiven bewusst wahrzunehmen, können diagrammatische Beispiele hilfreich sein. Weiter wird vermutet, dass durch die Verknüpfung beider Perspektiven Wirkungen von Veränderungen und strukturelle Eigenschaften leichter beobachtet werden können, sodass auch Kernargumente leichter entdeckt werden.

Literatur

Akker, & Gravemeijer, & McKenney, & Nieveen. (2006). Introducing educational desgin research. In: *Educational Desgin Research*. S.3-7.

Arcavi, A. (1994). Symbol Sense: Informal Sense-making in Formal Mathematics. In: *For the learning of mathematics*. 14(3). S.24-35.

Arcavi, A. (2005). Developing and Using Symbol Sense in Mathematics. In: *For the learning of mathematics*. 25(2). S.42-47.

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und –lehrens. In: *Lernen und Lehren von Mathematik*, vol. 6. S.1-56.

Berlin, T. (2010). *Algebra erwerben und besitzen. Eine binationale empirische Studie in Jahrgangsstufe 5*. Abgerufen unter: https://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DerivateServlet/Derivate-24507/main.pdf (12.11.2018).

Duval, (2006). A cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. In: *Educational Studies in Mathematics*. 61(1-2). S.103-131.

Dörfler, (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik. 27(3/4). S.200-219)

Hoffmann, M. H. G. (2005). *Erkenntnisentwicklung: ein semiotisch-pragmatischer Ansatz*. Frankfurt am Main: Klostermann.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In: D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. S.390-419. NY: Macmillan Publishing Company, Maxwell Macmillan Canada.

Krämer, S. (1998). *Symbolische Maschinen. Die Idee der Formaliserung in geschichtlichem Abriß*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Miller, M. (1986). *Kollektive Lernprozesse. Studien zur Grundlegung einer sozilogischen Lerntheorie*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Niebert, K. & Gropengießer, H. (2014). Leitfadengestützte Interviews. In: D. Krüger& I. Parchmann, H. Schecker (Hrsg.). *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung*. S. 121-132. Berlin: Springer Spektrum.

Sandmann, A. (2014). Lautes Denken. Die Analyse von Denk-, Lern-, und Problemlöseprozessen. In: D. Krüger& I. Parchmann, H. Schecker (Hrsg.). *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung*. S.179-188. Berlin: Springer Spektrum.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. In: *Educational Studies in Mathematics*. 22(1). S.1-36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. In: *Educational Studies in Mathematics*. 26. S. 191-228.

Vernaugd, G. (1996). Education, the best portion of Peaget's heritage. In: *Swiss Journal of Psychology*, 55(2/3). S.112-118.