Marcel SACKARENDT, Paderborn

Grenzkosten als lokale Änderungsrate? – Grenzen einer physikalisch geprägten Grundvorstellung im ökonomischen Kontext

Kostenfunktionen beschreiben Kosten von Unternehmen in Abhängigkeit der Produktionsmenge und gehören wohl zu den bekanntesten Anwendungen in der Wirtschaftsmathematik. Die Ableitung $K'(x_0)$ wird oft als Grenzkosten bezeichnet. Sie wird in der Fachliteratur standardmäßig als Näherung für den Kostenzuwachs aufgefasst, der bei der Produktion einer zusätzlichen Mengeneinheit (kurz ME) entsteht (vgl. Feudel 2015; Daume & Dennhard 2017, S. 60). Eine Visualisierung dieser Interpretation findet sich in Abb. 1.

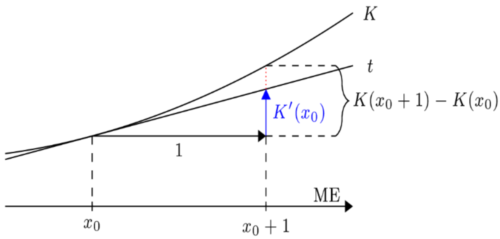

Abb. 1: In Fachliteratur übliche Interpretation von Grenzkosten (vgl. Tietze 2013, S. 318)

Grenzkosten sind auch in Bildungsplänen für das Fach Mathematik im Bereich Wirtschaft und Verwaltung am Berufskolleg in Nordrhein-Westfalen aufgeführt (vgl. z. B. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2007, S. 18). In Mathematikschulbüchern finden sich aber zum Teil Interpretationen von Grenzkosten als „lokale Kostenzunahme“ (Flath et al. 2013, S. 178) oder „momentane Kostenzunahme“ (Ott et al. 2016, S. 179), die aus der Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate abgeleitet sind. Warum derartige Interpretationen jedoch problematisch sind, wird in diesem Beitrag erläutert.

Zur Grundvorstellung der Ableitung als lokale Änderungsrate

Die Deutung der Ableitung im Sinne einer lokalen Änderungsrate findet sich vielfach und seit längerem in der mathematikdidaktischen Literatur (vgl. Blum & Törner 1983, S. 91 f.; Danckwerts & Vogel 2006, S. 50-58; Greefrath et al. 2016, S. 147 ff). Danckwerts & Vogel (2006, S. 56 ff) stellen eine Kette verbaler Beschreibungen von Bestandteilen des Differenzialquotienten dar, die zur Deutung als lokale Änderungsrate führt (Tab. 1). Hierbei beziehen sie sich zunächst auf eine Weg-Zeit-Funktion (zweite Spalte), bevor sie vom Kontext abstrahieren (dritte Spalte).

A. Frank, S. Krauss & K. Binder (Hrsg.),
Beiträge zum Mathematikunterricht 2019. Münster: WTM-Verlag.

Symbolisch	Kontextbezogen	Dekontextualisiert
$f(x_0)$	Zurückgelegter Weg	Bestand
$f(x) - f(x_0)$	Zurückgelegter Weg in Zeitspanne	Absolute Änderung
$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	Durchschnittsgeschwindigkeit	Mittlere Änderungsrate
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$	Momentangeschwindigkeit	Lokale Änderungsrate

Tab. 1: Kette verbaler Beschreibungen von Bestandteilen des Differenzialquotienten

Grenzen der lokalen Änderungsrate im ökonomischen Kontext

Wird das in Tab. 1 vorgestellte Vorgehen auf eine differenzierbare Kostenfunktion K übertragen (Tab. 2), so ergeben sich erste Schwierigkeiten bereits bei der Wahl passender Bezeichnungen. In der Physik sind eigene Begrifflichkeiten für mittlere und lokale Änderungsraten einer Weg-Zeit-Funktion gebräuchlich: Sie werden als Durchschnitts- bzw. Momentangeschwindigkeiten bezeichnet. In der Ökonomie gibt es für relative Kostenzuwächse hingegen keinen gesonderten Begriff, an dem man sich für eine kontextbezogene Bezeichnung lokaler Änderungsraten orientieren könnte.

Symbolisch	Dekontextualisiert	Kontextbezogen
$K(x_0)$	Bestand	Gesamtkosten
$K(x) - K(x_0)$	Absolute Änderung	Kostenzuwachs in Geldeinheiten (kurz GE)
$\frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0}$	Mittlere Änderungsrate	(Relativer) Kostenzuwachs in GE/ME
$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{K(x) - K(x_0)}{x - x_0}$	Lokale Änderungsrate	Lokaler Kostenzuwachs in GE/ME

Tab. 2: Kette aus Tab. 1 auf Kostenfunktionen übertragen

Wird der Vergleich mit der Geschwindigkeit fortgeführt, offenbaren sich noch gravierendere Probleme, die eine Deutung von Grenzkosten als lokale Änderungsrate mit sich bringt. So eignen sich glatte Funktionen hervorragend zur Modellierung eines Weg-Zeit-Zusammenhangs, da die Zeit kontinuierlich ist und in ständiger Beziehung zur Bewegung gesehen wird (vgl. Weigand 1988, S. 74 f.). Danckwerts & Vogel (2006, S. 58) betonen sogar, dass sich „der funktionale Weg-Zeit-Zusammenhang […] in intuitiver Weise des Zeitkontinuums bedient“, was die Interpretation der Ableitung als Momentangeschwindigkeit erleichtert. Und wie ist es bei den Kosten?

Üblicherweise werden die von der Produktionsmenge abhängigen Kosten (insb. in Schulbüchern) ebenfalls durch glatte Funktionen modelliert. Das damit unterstellte Änderungsverhalten ähnelt dem des von der Zeit abhängigen Weges – im Gegensatz zum Weg-Zeit-Zusammenhang existiert es derartig aber nur im Modell: Ist die Produktionsmenge diskret, verhalten sich Kosten in der Realität wie eine Folge. Danckwerts & Vogel (2006, S. 60) resümieren in ähnlichem Zusammenhang: „Der Grenzübergang $x \to x_0$ wird durch den Sachkontext nicht gedeckt“ und die Ableitung ist „eine theoretische Modellgröße, die im Sachkontext keine direkte Entsprechung hat.“

Selbst wenn die Produktionsmenge kontinuierlich ist (z. B. Öl), scheinen Grenzkosten als lokale Änderungsrate „schwer interpretierbar“ (Daume & Dennhard 2017, S. 104). Warum? Auch dann verhalten sich die von der Produktionsmenge abhängigen Kosten in der Realität anders, weil die abhängige Größe, nämlich die Kosten, in jedem Fall diskret ist. Eine realitätsnähere Modellierung wäre die durch eine Treppenfunktion (ähnlich Weigand 1988, S. 75), was in Abb. 2 am Beispiel von Benzinkosten veranschaulicht ist.

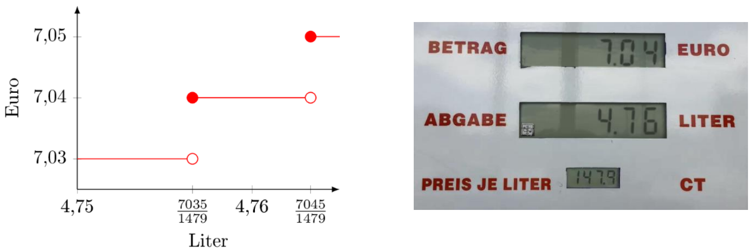

Abb. 2: Modellierung von Benzinkosten beim Preis von 1,479 €/Liter durch eine kaufmännisch rundende Funktion K mit $K(x) = \frac{1}{100} \cdot \lfloor (1{,}479 \cdot x) \cdot 100 + 0{,}5 \rfloor$

Bei dieser Modellierung gibt es sogar Stellen, an denen die Ableitung nicht existiert. Und wenn sie existiert, sind die Kosten lokal konstant – hier zeigt sich die „wahre“ lokale Änderungsrate (nämlich Null), wenn sie auch wenig erhellend ist. Jedenfalls sind Grenzkosten bei einer Modellierung mit glatten Funktionen auch im Falle einer kontinuierlichen Produktionsmenge i. A. eine Modellgröße ohne direkter Entsprechung im Kontext.

Fazit und Ausblick

Vorige Ausführungen zeigen, dass sich die Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate nicht ohne Weiteres auf Grenzkosten übertragen lässt. Vor diesem Hintergrund erscheint die Überarbeitung der Bildungspläne für den Grund- und Leistungskurs am Wirtschaftsgymnasium in Nordrhein-Westfalen erforderlich, wo Grenzkosten bisher als Anwendung beim Thema „Von der mittleren zur lokalen Änderungsrate“ vorgeschlagen werden (vgl. z. B. Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen 2007, S. 18).

Wesentlich für die Begriffsbildung der Ableitung sind neben der Grundvorstellung der lokalen Änderungsrate auch die der Tangentensteigung und lokalen Linearität (vgl. z. B. Büchter 2014, S. 44). Für die Förderung letztgenannter Grundvorstellungen bietet die in der Fachliteratur übliche Interpretation von Grenzkosten großes Potenzial. Überlegungen, wie sich diese Interpretation vorstellungsorientiert in den Mathematikunterricht am Berufskolleg einbringen lässt, werden aktuell konkretisiert.

Literatur

Büchter, A. (2014). Analysisunterricht zwischen Begriffsentwicklung und Kalkülaneignung – Befunde und konzeptionelle Überlegungen zum Tangentenbegriff. *Der Mathematikunterricht* 60 (2), S. 41-49.

Blum, W. & Törner, G. (1983). *Didaktik der Analysis.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Danckwerts, R. & Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten* (Nachdruck 2010). Berlin u. a.: Spektrum Akademischer Verlag.

Daume, P. & Dennhard, J. (2017). *Finanz- und Wirtschaftsmathematik im Unterricht: Optionen und Ökonomische Funktionen* (Band 2). Wiesbaden: Springer Spektrum.

Feudel, F. (2015). Die Ableitung als absolute Änderung? – Unterschiedliches Begriffsverständnis in Mathematik und Wirtschaftswissenschaften. In F. Calouri, H. Linneweber-Lammerskitten & C. Streit (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2015* (S. 1049-1052). Münster: WTM-Verlag.

Flath, S., Kreutz, C. & Schulte, V. (2013). *Lambacher Schweizer: Mathematik für die Fachhochschulreife, Wirtschaft und Verwaltung.* Stuttgart: Klett.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V. & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis: Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe.* Berlin u. a.: Springer Spektrum.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2007). Bildungspläne zur Erprobung für die Bildungsgänge, die zu einem Berufsabschluss nach Landesrecht und zur allgemeinen Hochschulreife oder zu beruflichen Kenntnissen und zur allgemeinen Hochschulreife führen – Teil III: Fachlehrplan Mathematik – Fachbereich Wirtschaft und Verwaltung – 1. Leistungskurs. *Schule NRW* 45605. https://www.berufsbildung.nrw.de/cms/upload/_lehrplaene/d/wirtschaft_und_verwaltung/teil3/lp_mathematik.pdf (13.12.2018)

Ott, R., Bohner, K. & Deusch, R. (2016). *Mathematik, kompetenzorientiert zur Fachhochschulreife.* 2. Auflage. Rinteln: Merkur Verlag.

Tietze, J. (2013). *Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik: Das praxisnahe Lehrbuch, inklusive Brückenkurs für Einsteiger.* 17., erweiterte Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Weigand, H.-G. (1988). Zur Bedeutung von Zeitfunktionen für den Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik* 9 (1), S. 55-86.