

Vorwissensprofile für den Erwerb des Bruchzahlkonzepts

Die Bruchrechnung stellt für einige Schülerinnen und Schüler nicht nur zu Beginn der Sekundarstufe I eine Herausforderung dar, sondern auch in den Folgejahren (Behr, Harel, Post & Lesh, 1993; Hecht & Vagi, 2010; Mazzocco & Devlin, 2008; Meert, Grégoire & Noël, 2009). Ebenso ist die Bedeutung des Bruchzahlkonzepts für den späteren schulischen und beruflichen Erfolg empirisch gesichert (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; National Mathematics Advisory Panel, 2008). Dabei werden verschiedene individuelle Lernvoraussetzungen als relevant für den Erwerb der Bruchrechnung erachtet, die bereits in der Primarstufe vorbereitet und systematisch angegangen werden (Bailey, Siegler & Geary, 2014; Vukovic, Fuchs, Geary, Jordan, Gersten & Siegler, 2014). In der psychologischen Forschungstradition wurde die Entwicklung einzelner Prädiktoren für die Bruchrechnung bereits längsschnittlich untersucht. Im Gegensatz dazu liegen in der Mathematikdidaktik nur wenige Studien zur Entwicklung und kaum welche mit einem Fokus auf die Prädiktivität vor. Unklar ist bislang, ob sich die individuellen Lernvoraussetzungen kompensatorisch ergänzen und beispielsweise Wissensdefizite in einem Vorwissensbereich durch einen stärkeren Wissenszuwachs in einem anderen Bereich ausgeglichen werden können oder ob es komplexere Vorwissenskonstellationen gibt, die besonders günstig oder ungünstig für den Erwerb des Bruchzahlkonzepts sind. Um Lernende durch gezielte Hilfestellungen im Lernprozess unterstützen zu können, ist es im ersten Schritt von Interesse, ob unterschiedliche Profile von Lernenden bezüglich ihrer Vorkenntnisse zur Bruchrechnung unterschieden werden können. Als Teil des EWIWE-Projekts (Schadl & Ufer, 2018) zielt der vorliegende Beitrag darauf ab, solche Vorwissensprofile empirisch zu identifizieren. Im weiteren Projektverlauf soll die weitere Entwicklung von Lernenden der verschiedenen Profile beim Erwerb der Bruchrechnung analysiert werden.

Methodik

Im EWIWE-Projekt wurden als individuelle Lernvoraussetzungen zur Bruchrechnung das *informelle Vorwissen zu einfachen Brüchen, proportionales Schließen mit natürlichen Zahlen, Operationsverständnis zur Multiplikation und Division natürlicher Zahlen, ordinale Zahlvorstellung* sowie das *spontane Fokussieren auf Relationen* von $N = 409$ Lernenden aus 8 gymnasialen und 10 Realschulklassen der Jahrgangsstufe 6 erhoben (s. Schadl & Ufer, 2018). Alle Daten wurden mittels Paper-Pencil-Tests zum ersten Messzeitpunkt einer Längsschnittstudie erhoben. Als Gesamtscore wurde bei zufriedenstellenden Reliabilitäten jeweils das arithmetische Mittel bestimmt.

Die Lernerprofile wurden explorativ mittels einer Clusteranalyse ermittelt. Als Proximitätsmaß wurde die quadrierte euklidische Distanz zugrunde gelegt. Die Clusteranzahl wurde nach dem Elbow-Kriterium ausgewählt (Backhaus, Erichson, Plinke & Weiber, 2018), wobei in einem ersten Schritt mithilfe des Single-Linkage-Verfahrens Ausreißer identifiziert und entfernt wurden. Eine Ein-Cluster-Lösung blieb unberücksichtigt, um den größten Heterogenitätssprung beim Wechsel von der Ein- zur Zwei-Cluster-Lösung auszuschließen.

Ergebnisse

Dem Scree-Plot in Abb. 1 zufolge kann eine Drei- oder Fünf-Cluster-Lösung angenommen werden. Bedingt durch die bessere inhaltliche Interpretierbarkeit der Maße wurde die Fünf-Cluster-Lösung ausgewählt.

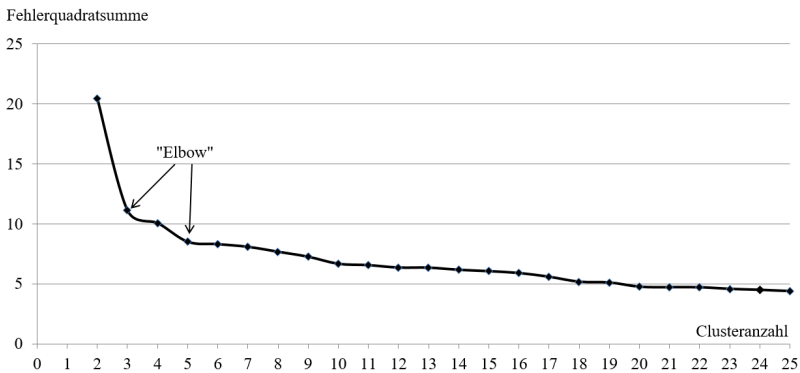


Abb. 1: Elbow-Kriterium zur Bestimmung der Clusteranzahl (Scree-Plot)

Tab. 1 stellt für die einzelnen Lernvoraussetzungen die z-standardisierten Mittelwerte und Standardabweichungen der Gesamtscores der fünf Lernerprofile sowie die entsprechenden Stichprobengrößen dar.

	Informelles Vorwissen zu einfachen Brüchen <i>M (SD)</i>	Proportionales Schließen <i>M (SD)</i>	Operationsverständnis Multiplikation und Division <i>M (SD)</i>	Ordinale Zahlvorstellung <i>M (SD)</i>	Spontanes Fokussieren auf Relationen <i>M (SD)</i>	<i>N (%)</i>
Profil 1	1.50 (.52)	1.93 (.27)	1.84 (.15)	.72 (.33)	.27 (.93)	8 (2.1)
Profil 2	.86 (.71)	.74 (.64)	.71 (.71)	.43 (.41)	.01 (.78)	147 (37.8)
Profil 3	-.29 (.64)	.02 (.84)	.06 (.80)	-.01 (.58)	2.07 (.71)	31 (8.0)
Profil 4	-.62 (.67)	-.63 (.77)	-.60 (.78)	-.06 (.61)	-.39 (.66)	194 (49.9)
Profil 5	-.88 (.51)	-.38 (.64)	-.58 (.73)	-3.74 (1.07)	-.35 (.74)	9 (2.3)

Tab. 1: z-standardisierte Mittelwerte und Standardabweichungen der Gesamtscores sowie Stichprobengrößen der fünf Lernerprofile

Inhaltliche Beschreibung der fünf Lernerprofile

Lernerprofil 1 ist mit Ausnahme von dem spontanen Fokussieren auf Relationen durch überdurchschnittliche Leistungen in allen Vorwissensbereichen gekennzeichnet, wobei insbesondere Stärken beim Operationsverständnis zur Multiplikation und Division als auch im proportionalen Schließen mit natürlichen Zahlen zu erkennen sind. Diese beiden Lernvoraussetzungen sind sehr homogen. Lernerprofil 2 weist überdurchschnittliche Leistungen in allen Vorwissensbereichen auf. Lediglich im spontanen Fokussieren auf Relationen liegen die Leistungen nicht im überdurchschnittlichen Bereich. Lernerprofil 3 befindet sich in allen Vorwissensbereichen im mittleren Leistungsbereich. Überdurchschnittliche Ausprägungen sind im spontanen Fokussieren auf Relationen erkennbar, Schwächen dagegen im informellen Vorwissen zu einfachen Brüchen. Lernerprofil 4 zeigt abgesehen von den durchschnittlichen Leistungen im Bereich der ordinalen Zahlvorstellung unterdurchschnittliche Leistungen in allen Vorwissensbereichen. Lernerprofil 5 erbringt unterdurchschnittliche Leistungen in allen Vorwissensbereichen. In Abgrenzung zum Lernerprofil 4 fallen besonders schwache Leistungen im Bereich der ordinalen Zahlvorstellung auf.

Diskussion

Es lassen sich fünf interpretierbare Vorwissensprofile für den Erwerb des Bruchzahlkonzepts identifizieren. Andere Vorgehensweisen liefern vergleichbare Lösungen. Insgesamt zeichnet sich ein erwartungsgemäß sehr heterogenes Bild des Vorwissens ab. Dabei werden große Cluster mit homogen überdurchschnittlichen bzw. unterdurchschnittlichen Leistungen erkennbar. Weiterhin bilden sich sehr kleine Cluster, die sich durch ein sehr ausgeprägtes (Lernerprofil 1) bzw. sehr niedriges Vorwissen (Lernerprofil 5) in einzelnen Bereichen auszeichnen. Gerade zu diesen Lernerprofilen ist eine längsschnittliche Entwicklung im Vergleich zu den ähnlichen Clustern (Lernerprofil 2 bzw. 4) interessant. Dies trifft vor allem auch auf den Vorwissensbereich der ordinalen Zahlvorstellung zu. Lernerprofil 3 ist insofern von Interesse, als dass das informelle Vorwissen zu Bruchzahlen besonders auf nationaler Ebene intensiv diskutiert wird, während das spontane Fokussieren auf Relationen im internationalen Bereich thematisiert wird. Hier stellt sich im Rahmen weiterer Forschungsbemühungen insbesondere die Frage, welche Auswirkungen die Schwächen bzw. Stärken in diesen Bereichen auf den Erwerb des Bruchzahlkonzepts haben.

Literatur

- Backhaus, K., Erichson, B., Plinke, W. & Weiber, R. (2018). *Multivariate Analysemethoden. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Berlin: Springer.
- Bailey, D., Hoard, M., Nugent, L. & Geary, D. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology*, *113*, 447–455.
- Bailey, D., Siegler, R. & Geary, D. (2014). Early predictors of middle school fraction knowledge. *Developmental Science*, *17*, 775–785.
- Behr, M., Harel, G., Post, T. & Lesh, R. (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis—emphasis on the operator construct. In T. Carpenter, E. Fennema & T. Romberg (eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp. 13–47). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Hecht, S. & Vagi, K. (2010). Sources of group and individual differences in emerging fraction skills. *Journal of Educational Psychology*, *102*, 843–859.
- Mazzocco, M. & Devlin, K. (2008). Parts and holes: Gaps in rational number sense in children with vs. without mathematical learning disability. *Developmental Science*, *11*(5), 681–691.
- Meert, G., Grégoire, J. & Noël, M. (2009). Rational numbers: Componential versus holistic representation of fractions in a magnitude comparison task. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *62*, 1598–1616.
- National Mathematics Advisory Panel. (2008). *Foundations for success: The final report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: US Department of Education.
- Schadl, C. & Ufer, S. (2018). Vorwissen für den Erwerb des Bruchkonzepts – Erhebungsinstrumente aus dem Projekt EWIWE. In Fachgruppe Didaktik der Mathematik der Universität Paderborn (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1551 – 1554). Münster: WTM.
- Vukovic, R., Fuchs, L., Geary, D., Jordan, N., Gersten, R. & Siegler, R. (2014). Sources of individual differences in children’s understanding of fractions. *Child Development*, *85*, 1461–1476.