

Probleme beim Erlernen von Algebra

In diesem Beitrag werden Ergebnisse meiner Dissertation „Probleme des Mathematikunterrichts beim Übergang von Arithmetik zur Algebra“ vorgestellt. Die Arbeit steht in der Tradition des Ansatzes „Rekonstruktion von mathematischem Wissen“ (vgl. Burscheid (2010)). Wie empirische Studien gezeigt haben liegen die hauptsächlichen Schwierigkeiten der Schülerinnen und Schüler beim Erlernen von Algebra beim Verständnis des Begriffs Variable und dem Umgang mit diesen. Der Fragestellung nach der Art der Probleme und deren Ursachen wird durch eine Analyse der historischen Entwicklung der Algebra und einer Schulbuchanalyse nachgegangen. In der historischen Analyse wird die Entwicklung der algebraischen Symbolsprache betrachtet und die zugrunde liegende Auffassung von Algebra untersucht. In der Schulbuchanalyse wird die Auffassung von Algebra der Schülerinnen und Schüler ermittelt, welche im heutigen Mathematikunterricht durch das Arbeiten mit Schulbüchern erlangt wird.

1. Variablen in der elementaren Algebra

Variable bilden die Grundlage für allgemeine Beschreibungen. Daher ist der Begriff Variable der zentrale Begriff der Algebra. Der Begriff Variable in der elementaren Algebra ist facettenreich. Dies zeigt sich sowohl in der unterschiedlichen Verwendung von Variablen als auch im Umgang mit Variablen. Freudenthal unterscheidet drei Verwendungszwecke von Variablen: Variable als *Unbekannte*, *Unbestimmte* und *Veränderliche* (vgl. Freudenthal (1973)). Küchemann verfeinerte die Unterteilung hinsichtlich der Verwendung bezogen auf die elementare Algebra. Er differenziert bei der Variablen als Unbekannten zwischen *Letter Evaluated* und *Letter as Specific Unknown* (vgl. Küchemann (1987)). Diese Unterteilung entspricht historisch gesehen der Unterscheidung zwischen Variable als *gesuchte Unbekannte* bei Diophant und Variable als *gegebene Unbekannte* bei Vieta und ist somit für das Verständnis des Begriffs Variable wesentlich. Daher wird hier Freudenthals Kategorie *Unbekannte* in Anlehnung an Küchemann in *gesuchte Unbekannte* und *gegebene Unbekannte* unterteilt. Der unterschiedliche Umgang mit Variablen wurde von Malles Variablenaspekten geprägt. Malle unterscheidet in der Schule zwischen drei Aspekten des Variablenbegriffes: den *Gegenstandsaspekt*, den *Einsetzungsaspekt* und den *Kalkülaspekt* (vgl. Malle (1993)). Die Dominanz eines Variablenaspekts hängt vom Betrachtungsschwerpunkt ab. Somit können verschiedene Blickwinkel auf dieselbe Variable in einem algebraischen Ausdruck unterschiedliche Aspekte betonen.

2. Epistemologische Hindernisse beim Erwerb des Begriffs Variable

Die historische Entwicklung der Algebra kann unter verschiedenen Gesichtspunkten eingeteilt werden. Eine gängige symbolbasierte Einteilung differenziert zwischen drei Phasen der Darstellung der Algebra: *rhetorische Phase*, *synkopierte Phase* und *symbolische Phase* (vgl. Boyer (1968)). Das Unterscheidungsmerkmal ist die Art der sprachlichen Darstellung. In der *rhetorischen Phase* sind alle Äußerungen rein verbal. Diophant leitete ca. 250 n. Chr. durch das Verwenden von Symbolen für gesuchte Unbekannte die *synkopierte Phase* ein. Die *symbolische Phase* beginnt ca. 1700 mit der Verwendung von Symbolen für gegebene Unbekannte durch Vieta. Erst seitdem ist eine komplette Symbolisierung möglich. Der Übergang von einer Phase in die nächste ist gekennzeichnet durch einen Entwicklungssprung. Dieser kann auch beschrieben werden als das Überwinden eines zugrunde liegenden Hindernisses. Bei den unterschiedlichen Verwendungen von Variablen unterscheiden sich die Symbole semantisch und epistemologisch voneinander. Diophants Einführung von Variablen ermöglicht auf einer halb formalen Ebene mit diesen zu rechnen. Durch die Verwendung von Variablen als gegebene Unbekannte ist es möglich mathematische Sachverhalte losgelöst von den exemplarischen Zahlbeispielen auf einer formalen Ebene zu betrachten. Dies zeigt, dass das Erlernen des Begriffs Variable mit epistemologischen Hindernissen verbunden ist. Diese Hindernisse liegen in der Natur der Sache und sind somit unabhängig von dem Individuum und der Art des Unterrichts (vgl. Sierpinska (1992)). Dies wird auch durch die Ergebnisse empirischer Studien zum Verständnis des Variablenbegriffs gestützt (vgl. Harper (1987)).

3. Auffassung von Algebra in der historischen Entwicklung

Eine weitere Einteilung der historischen Entwicklung der Algebra ist die Unterscheidung in semantische Stufen nach Viktor Katz (vgl. Katz (2007)). Die Trennungsmerkmale sind hier die behandelten mathematischen Objekte und Inhalte. Katz semantisches Stufenmodell zeigt, dass die Vorstellung der Begriffe und die Auffassung von Algebra im Laufe der Zeit eine Veränderung durchlaufen. Die formal abstrakte Auffassung von Algebra, als Wissenschaft der Strukturen, ist eine moderne Auffassung. In der historischen Entwicklung dominierte über einen langen Zeitraum eine empirisch-gegenständliche Auffassung von Algebra. In einer Analyse von Eulers Lehrbuch „Vollständige Anleitung zur Algebra“ wird die Auffassung von Algebra in der historischen Entwicklung untersucht (vgl. Euler (1770)). Die Auffassung innerhalb Eulers Lehrbuch kann aufgrund der großen Verbreitung des Werkes und seinen Einfluss auf die Lehre als paradigmatisches Beispiel für die Auffassung der Algebra im 18. Jahrhundert angesehen werden. Die Analyse von

Eulers Vorgehen bei der Einführung von Begriffen und sein Umgang mit Objekten haben gezeigt, dass das Ziel von Eulers „Algebra“ die Beschreibung der Phänomene der Realität ist. Euler definiert seine Objekte nicht wie in einer abstrakten Wissenschaft, sondern die Objekte sind im Bezug zur Realität gegeben. Die behandelten Objekte der Algebra sind empirische Größen und das Verhältnis von Größen zueinander. Euler begründet mathematische Sachverhalte und Gesetze ebenfalls in realen Gegenstandsbereichen oder durch konkrete Beispiele. Die Begriffe in Eulers „Algebra“ sind wie die Zahlen auf empirische Objekte bezogen. Eine Ausnahme bilden die imaginären Zahlen, die selbst kein Referenzobjekt besitzen, aber aus den erlaubten Rechenoperationen der Theorie entstehen. Eine mathematische Aussage ist wahr, wenn sie eine zutreffende Beschreibung der empirischen Phänomene darstellt. Eulers „Algebra“ erfüllt die Merkmale einer empirisch-gegenständlichen Theorie in der Mathematik.

4. Auffassung von Algebra im heutigen Mathematikunterricht

Das Schulbuch dient sowohl den Lernenden als Arbeitsmittel als auch den Lehrenden als Orientierung bei der Vorbereitung des Unterrichts. Daher ist es charakterisierend für den Mathematikunterricht. Mittels einer Schulbuchanalyse der Schulbuchreihe „Elemente der Mathematik“ wird die Auffassung der Schülerinnen und Schüler von Algebra im heutigen Mathematikunterricht ermittelt (vgl. Griesel (2007)). In der Schulbuchreihe werden Variablen bereits in der fünften Klasse als Platzhalter für Dinge eingeführt. Sie werden jedoch bis zur systematischen Behandlung der elementaren Algebra in der siebten Klasse nur als Unbestimmte in Formeln verwendet. Variablen als Unbekannte stehen später für gesuchte Zahlen oder empirische Größen. Die Addition wird in der fünften Klasse als das Aneinanderlegen von Strecken geometrisch interpretiert. Diese geometrische Vorstellung dient als Begründungsgrundlage für die Rechengesetze der Addition. Die Begründung der Rechengesetze der Multiplikation erfolgt über die Beschreibungsgleichheit geometrischer Figuren ebenfalls in realen Größenbereichen. Die Einführung des Rechnens mit Termen in der siebten Klasse erfolgt an einer anwendungsbezogenen Sachaufgabe. Für den Drahtverbrauch einer geometrischen Figur werden zwei Terme aufgestellt. Die Äquivalenz der beiden Terme wird für positive Werte empirisch über die Sachsituation begründet. Für negative Zahlen wird zunächst mit der Einsetzungsgleichheit argumentiert und anschließend mit Hilfe von Rechengesetzen über die Umformungsgleichheit die Umformungsregeln allgemein begründet. Dabei wird die Gültigkeit der Rechengesetze für Terme nicht mehr aufgezeigt. Die implizite Rechtfertigung der Rechengesetze liegt in der Verwendung der Variablen als Platzhalter für rationale Zahlen. Dafür wurden die Rechengesetze im Größenbereich

der Längen begründet. Die Variablenaspekte werden in dem Schulbuch bei einzelnen Aufgaben vermischt. Bei der Behandlung von neuen Medien zeigt sich mit dem Namensaspekt eine weitere Bedeutung von Variablen. Das Lösen von Gleichungen wird mithilfe eines Waagemodells und der geometrischen Darstellung am Zahlenstrahl empirisch eingeführt. Neue Lerninhalte werden in „Elemente der Mathematik“ stets an exemplarischen Beispielen in realen Größenbereichen eingeführt und die Lernenden bauen zu den Inhalten empirische Vorstellungen aus. Es ist daher gerechtfertigt zu sagen, dass die Lernenden eine stark empirisch-gegenständlich geprägte Auffassung von Algebra erlangen.

5. Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse der einzelnen Untersuchungen haben gezeigt, dass die Schülerinnen und Schüler im heutigen Mathematikunterricht eine stark empirisch-gegenständlich geprägte Auffassung von Algebra erwerben. Diese empirisch-gegenständliche Auffassung ist wie am Beispiel von Eulers „Algebra“ gezeigt wurde, historisch berechtigt und stellt eine angemessene Beschreibung der Schülertheorien dar. Algebra wird daher in der Schule durch die Kontextualisierung innerhalb der empirischen Theorien als deren Sprache entwickelt.

Literatur

- Boyer, C.B (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley and Sons.
- Burscheid, H. J. & Struve, H. (2010). *Mathematikdidaktik in Rekonstruktion – Ein Beitrag zur ihrer Grundlegung*. Hildesheim: Franzbecker KG.
- Euler, L. (1770). *Vollständige Anleitung zur Algebra*. St-Petersburg: Kays. Acad. der Wissenschaften. Neu herausgegeben von J. E. Hofmann (1959). Stuttgart: Reclam.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Klett.
- Griesel, H. et al. (2007). *Elemente der Mathematik 7*. Schroedel.
- Harper, E. (1987). Ghost of Diophantus. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 75-90.
- Katz, V. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 185-201.
- Küchemann, D. (1987). Children's Understanding of Numerical Variables. *Mathematics in School*, 7, 23-26.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*, Wiesbaden: Vieweg Verlagsgesellschaft.
- Schiffer, K. (im Druck)(2019). *Probleme des Mathematikunterrichts beim Übergang von Arithmetik zur Algebra*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Sierpinska, A. (1992). On Understanding the Notion of Function. In G. Harel & E. Dubinsky, *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (S. 25-58). *Mathematical Association of America*.