David SCHÖNWÄLDER, Mosbach

Arithmetik können in der Studieneingangsphase – Aspekte eines summativen Referenzmodells zu grundlegendem Wissen und Können im Bereich der Arithmetik

Einleitung

Viele Hochschulen mit naturwissenschaftlichen Studiengängen bieten sogenannte „Brückenkurse“ an, um den Einstieg in das Studium eines MINT-Faches zu erleichtern und den hohen Abbrecherquoten entgegen zu wirken (Heublein, Richter, Schmelzer & Sommer, 2014). Dabei basieren Aufgaben der Diagnose- und Fördermaterialien teils auf theoretischen Modellen außerhalb der Mathematikdidaktik (wie z.B. Bloomsche Taxonomie), teils wird eine theoretische Basis nicht ausdrücklich formuliert, sondern die Aufgaben scheinen sich an curricularen Inhalts- und Kompetenzformulierungen zu orientieren. Dies manifestiert sich beispielsweise in Mindestanforderungskatalogen wie cosh (2014).

Für die Diagnose von grundlegendem Wissen und Können in einem mathematischen Teilgebiet ist daher ein umfassender und dennoch prägnanter Überblick über die wichtigen fachdidaktischen Anforderungen für den jeweiligen Inhaltbereich erforderlich. Pinkernell, Düsi & Vogel (2017) sowie Ullrich, Schönwälder & Hamich (2018) haben für die Bereiche Algebra, Funktionale Zusammenhänge, Arithmetik und Geometrie (Messen) zum Teil Entwürfe für summative Referenzmodelle vorgestellt, die diesem Anspruch folgen sollen. In diesem Beitrag wird der aktuelle Stand des Referenzmodells für den Inhaltsbereich Arithmetik zur Diskussion gestellt, so wie es derzeit im Projekt optes+ (Optimierung der Selbststudiumsphase, www.optes.de) verwendet wird.

Ein summatives Referenzmodell zur Arithmetik

Im vorliegenden Modell (Abb. 1) wurde die in einer derzeit noch laufenden systematischen Literaturrecherche gefundene und gesichtete Literatur als Zwischenstand zu neun Aspekten zusammengefasst (vgl. „War das alles? – Systematische Literaturrecherche am Beispiel einer theoriebildenden mathematikdidaktischen Arbeit“ in diesem Band). Hiervon sollen drei herausgegriffen und besonders unter dem Gesichtspunkt der Operationalisierung in Aufgaben näher betrachtet werden.

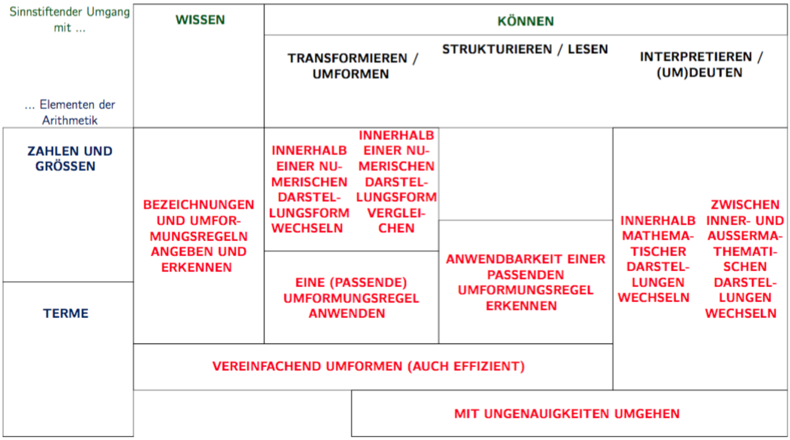

Abb. 1: Derzeitiger Stand des literaturbasierten Modells zu grundlegendem Wissen und Können im Bereich der Arithmetik am Ende der Sekundarstufen

Zum Aspekt *Bezeichnungen und Umformungsregeln angeben*: Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass dieser Aspekt deklaratives bzw. prototypisches Wissen für beide genannten Gegenständen der Arithmetik, nämlich Zahlen und Größen sowie Terme, betrifft. Genauer definieren wir: Als wichtig erachtete Begriffe, Bezeichnungen, Sätze und Verfahren der Sekundarstufenarithmetik werden angegeben, erkannt oder identifiziert. Dazu zählen insb. Rechen- und Umformungsregeln von (Bruch- und Dezimal-) Zahlen, Primzahlen, Potenzen, Wurzeln und Logarithmen sowie Prozentrechnung, aber auch prototypisches Wissen z.B. über den Zahlbereichen.

Baroody, Feil, & Johnson (2007) betonen grundsätzlich die Notwendigkeit für deklaratives und prototypisches Wissen („knowledge about facts and principles“, S. 123). Für den Bereich Arithmetik zählen u.a. Ehlert, Fritz, Arndt & Leutner (2013) insb. das „Regelwissen über den Umgang mit Zahlen“ und „das Erkennen von Beziehungen zwischen Quantitäten und Zahlen, d.h. das Verstehen der zugrunde liegenden mathematischen Strukturen“ zu den mathematischen Voraussetzungen für das Rechnen in der Sekundarstufe (S. 240). Bei Aufgaben, die diesen Aspekt abprüfen sollen, steht das eigentliche Rechnen oder die Anwendung von Rechen- oder Umformungsregeln im Hintergrund. Vielmehr werden diese Regeln, aber auch Definitionen oder Bezeichnungen gezielt abgefragt, wie folgende Aufgabe (Abb. 2) verdeutlicht:

Betrachten Sie die folgenden Rechenregeln (Es gilt: $a, b, c > 0$).

A: $a^{(b-c)} = \frac{a^b}{a^c}$ B: $a^{(a-c)} = a^a - a^c$ C: $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$

Entscheiden Sie sich bei jeder Rechenregel, ob sie richtig ist und wählen Sie dann die passende Kombination aus.

Abb. 2: Beispielaufgabe *Bezeichnungen und Umformungsregeln angeben*

Zum Aspekt *Innerhalb einer numerischen Darstellungsform wechseln*: In der Tabelle unter Transformieren eingeordnet, behandelt dieser Aspekt die Umformung einer Zahl oder Größe und wir definieren wie folgt: Eine arithmetische/numerische Zahl oder Größe wird in eine andere, gleichwertige arithmetische/numerische Zahl oder Größe umgeformt.

Innerhalb der numerischen Repräsentationsform kann eine Zahl u.a. als Dezimalzahl, Bruchzahl oder Prozentzahl auftreten. Weiter können Größen in unterschiedlichen Einheiten angegeben werden. Bass (2003) betont, dass die zu verwendende Repräsentation stark vom Kontext oder der weiteren Verwendung des Ergebnisses abhängt. Weiter ist die Umwandlung von Brüchen (z.B. gemeiner Bruch <> Prozentzahl) eine wichtige Fertigkeit (vgl. Padberg, 2009), die in folgender Aufgabe (Abb. 3) abgeprüft wird.

$\frac{1}{8}$ entspricht...

☐ 1.8%	☐ 92%	☐ 12.5%
☐ $\frac{1}{8}$%	☐ 8%	☐ Weiß ich nicht.

Abb. 3: Beispielaufgabe *Innerhalb einer numerischen Darstellungsform wechseln*

Zum Aspekt *Anwendbarkeit einer passenden Umformungsregel erkennen*: Eingeordnet unter Strukturieren definieren wir für beide genannten Gegenstände der Arithmetik: Bei einem arithmetischen Ausdruck wird die Anwendbarkeit einer passenden Umformungsregel erkannt. Dies beinhaltet auch die Erkennung der logischen Ordnung des arithmetischen Ausdrucks.

Dieser Aspekt betont, dass „ein Ausdruck vor allem darauf hin betrachtet [wird], ob irgendetwas gerechnet – also ein Verfahren verwendet – werden kann.“ (Rüede, 2012b, S. 722) Aufgaben, die diesen Aspekt operationalisieren, verlangen also noch keine Rechnung, sondern das einer Rechnung notwendig voranstehende Erkennen der Anwendbarkeit einer Rechenregel. Das diesem Erkennen zugrundliegende passende Strukturieren von Termen wird im Wesentlichen an algebraischen Termen diskutiert (vgl. Rüede, 2012a). Diese lassen sich offensichtlich auch auf Terme der „verallgemeinerte Arithmetik“ anwenden, wobei wir hierunter auch Terme mit Variablen zählen, solange das Umformen arithmetischen Regeln folgt, wie etwa das Kürzen und Erweitern von Brüchen oder das Anwenden des Distributivgesetzes. Das Lösen von Gleichungen ist demnach keine verallgemeinerte Arithmetik und wird nicht betrachtet.

Ich welchen Fällen können Sie die Klammern weglassen, ohne dass sich der Wert des Terms verändert? Wählen Sie die passende Kombination.

A: $a \cdot b + (c - d)$ B: $a \cdot (b - c) + d$ C: $a \cdot b - (c + d)$ D: $(a \cdot b + c) - d$ E: $\left(\frac{a}{b}\right) + c - d$

Abb. 4: Beispielaufgabe *Anwendbarkeit einer passenden Umformungsregel erkennen*

Ausblick

Das vorgelegte Modell ist als vorläufig zu betrachten. Nach Abschluss der Literaturrecherche wird das Modell in einer Expertenbefragung validiert. Ebenso sind Maßnahmen zur empirischen Absicherung der Inhaltsvalidität geplant. In der finalen Version soll dieses Modell sowohl zur Analyse und Erstellung von Diagnose- und Fördermaterialien dienen, aber auch als konzeptionelle Diskussionsgrundlage, welche Fertigkeiten im Bereich der Arithmetik in der Studieneingangsphase beherrscht werden sollten.

Literatur

Baroody, A. J., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An Alternative Reconceptualization of Procedural and Conceptual Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38*(2), 115–131.

Bass, H. (2003). Computational Fluency, Algorithms, and Mathematical Proficiency: One Mathematician's Perspective. *Teaching Children Mathematics*, *9*(6), 322–327.

cosh: cooperation schule:hochschule. (2014). Mindestanforderungskatalog Mathematik. Abgerufen von www.cosh-mathe.de/materialien am 12.12.2018

Ehlert, A., Fritz, A., Arndt, D., & Leutner, D. (2013). Arithmetische Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern in den Klassen 5 bis 7 der Sekundarstufe. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *34*(2), 237–263.

Heublein, U., Richter, J., Schmelzer, R., & Sommer, D. (2014). Die Entwicklung der Studienabbruchquoten an den deutschen Hochschulen: statistische Berechnungen auf der Basis des Absolventenjahrgangs 2012. *Forum Hochschule*, (4).

Padberg, F. (2009). *Didaktik der Bruchrechnung für Lehrerausbildung und Lehrerfortbildung*. Heidelberg: Spektrum.

Pinkernell, G., Düsi, C., & Vogel, M. (2017). Aspekte des Wissens und Könnens der elementaren Algebra. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2017* (S. 769–772). Münster: WTM-Verlag.

Rüede, C. (2012a). Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks als Herstellen von Bezügen. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *33*(1), 113–141.

Rüede, C. (2012b). Zur Förderung des Strukturierens algebraischer Ausdrücke. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 721–724). Münster: WTM-Verlag.

Ullrich, D., Schönwälder, D., & Hamich, M. (2018). Summative Referenzmodelle für ausgewählte Bereiche grundlegenden Wissens und Könnens am Ende der Sekundarstufe. In *Beiträge zum Mathematikunterricht* (S. 1823–1826). Münster: WTM-Verlag.