Jan SCHUMACHER, Paderborn

Rekonstruktion diagrammatischen Schließens am Beispiel der Subtraktion negativer Zahlen

Beim Erlernen negativer Zahlen haben es Schüler mit bekannten Zeichen zu tun, die neu gedeutet werden. Das bekannte Standardbeispiel ist das Minuszeichen, das nicht mehr nur als Zeichen für die Subtraktion genutzt wird, sondern zusätzlich als Vorzeichen und als Zeichen für die Gegenzahl gedeutet werden muss. Durch die Relevanz von Zeichen in der Mathematik und dabei auch insbesondere bei den ganzen Zahlen bietet sich eine semiotische Analyse der Lernprozesse von Schülern an. Peirce präsentiert mit dem diagrammatischen Schließen eine Theorie, die die Handlungen von Lernenden beschreibt. In diesem Beitrag wird dargelegt, dass Vergnauds Schema-Begriff ein geeignetes Instrument zur Rekonstruktion diagrammatischen Schließens ist. Die Beispielanalyse einer Szene, in der zwei Schülerinnen die Regel zur Subtraktion negativer Zahlen herleiten, beschließt diesen Beitrag.

Diagrammatisches Schließen

Diagramme im Sinne von Peirce sind Zeichen, die durch Regeln und Konventionen eines Darstellungssystems festgelegt sind und die die Relationen des Objekts zeigen. Diagramme können als Forschungsobjekte betrachtet werden, an denen neue Erkenntnisse gewonnen werden können. Die Untersuchung der Diagramme wird von Pierce als diagrammatisches Schließen bzw. Denken bezeichnet. Diagrammatisches Schließen ist ein

> „Schließen, welches gemäß einer in allgemeinen Begriffen formulierten Vorschrift ein Diagramm konstruiert, Experimente an diesem Diagramm durchführt, deren Resultate notiert, sich Gewissheit verschafft, dass ähnliche Experimente, die an irgendeinem gemäß der selben Vorschrift konstruierten Diagramm durchgeführt werden, die selben Resultate haben würden, und dieses in allgemeinen Begriffen zum Ausdruck bringt." (Peirce, 1976, S. 47f)

Zusammenfassend lässt sich diagrammatisches Schließen als „rule-based but inventive and constructive manipulation of diagrams for investigating their properties and relationships" (Dörfler, 2016, S. 26) beschreiben. Somit ist diagrammatisches Schließen keine mechanische, sondern eine kreative Tätigkeit, durch die neue Diagramme konstruiert und erforscht werden.

Aus didaktischer Perspektive kann es interessant sein, Diagramme im Rahmen diagrammatischen Schließens zu erforschen mit dem Ziel, die Regeln von bestimmten Darstellungssystemen abduktiv zu erschließen. Für einen Analyse dieses Prozesses, bei dem aus den Handlungen beim diagrammatischen Schließen auf die Regeln des Darstellungssystems geschlossen wird, bietet sich Vergnauds Schema-Begriff an.

Vergnauds Schema-Begriff

Für Vergnaud ist ein Schema „the invariant organization of behavior (action) for a certain class of situations” (Vergnaud 1996, S. 222). Schemata bestehen aus vier verschiedenen Bestandteilen: operationale Invarianten, Inferenzmöglichkeiten, Handlungsregeln und Zielen. Ein besonderer Fokus liegt hierbei auf den operationalen Invarianten, den *theorems-in-action* und den *concepts-in-action*. *Theorems-in-action* sind subjektive Theoreme, die den Handlungen der Lernenden zugrunde liegen. Sie können wahr oder falsch sein, werden aber immer von den Lernenden als wahr erachtet.

> „*Concepts-in-action* are categories (objects, properties, relationships, transformations, processes, etc.) that enable the subject to cut the real world into distinct elements and aspects, and pick up the most adequate selection of information according the situation and scheme involved.” (Vergnaud, 1996, S. 225, Herv. im Original)

Anders als *theorems-in-action* sind *concepts-in-action* weder wahr noch falsch, sondern können in einer gegebenen Situation nur relevant oder irrelevant sein.

Die Rekonstruktion der operationalen Invarianten aus den Handlungen bietet einen Einblick in die den Handlungen zugrundeliegenden impliziten kognitiven Strukturen der Schüler (Vergnaud, 1996, S. 219). Die Untersuchung dieser impliziten kognitiven Strukturen ermöglicht die Analyse tatsächlichen diagrammatischen Schließens, da die Regeln des Darstellungssystems, auf denen das tatsächliche diagrammatische Schließen der Schüler basiert, aus den impliziten kognitiven Strukturen abgeleitet werden.

Datengrundlage

Die nachfolgende Analyse erfolgt an einem Transkript eines Videos zweier Schülerinnen, die eine Lernumgebung zur Subtraktion negativer Zahlen bearbeiten. Die Lernumgebung basiert auf einem rein innermathematischen Zugang, dem das Permanenzprinzip zugrunde liegt. Dabei wird auf Aufgaben, die den Lernenden aus der Primarstufe bekannt sind – u.a. Entdeckerpäckchen und Rechentafeln – zurückgegriffen. Zu Beginn der Lernumgebung bearbeiten die Lernenden sechs Entdeckerpäckchen anhand derer sie mithilfe des Permanenzprinzips an die Subtraktion mit negativem Subtrahenden herangeführt werden. Die bearbeiteten Aufgaben werden in eine Rechentafel übertragen, die im weiteren Verlauf vollständig ausgefüllt wird. Im weiteren Verlauf der Lernumgebung vergleichen die Lernenden die Rechentafel mit einer Rechentafel zur Addition, um aus diesem Vergleich die Regel zur Subtraktion einer negativen Zahl abzuleiten. Die Rechentafeln bieten Diagramme auf zwei verschiedenen Ebenen an und damit auch zwei verschiedene Darstellungssysteme. Die einzelnen Aufgaben sind Teil des Darstellungssystems ‚Arithmetik'. Die Rechentafeln hingegen sind Teil des Darstellungssystems ‚Rechentafeln in der Arithmetik', dessen Regeln sich aus den Mustern und Strukturen der Rechentafeln ergibt.

Im Folgenden wird eine Szene, in der die Schülerinnen die bisher unbekannte Regel zur Subtraktion herleiten, analysiert und die *theorems*- und *concepts-in-action* rekonstruiert. Dazu wird der vorliegende Transkriptausschnitt als Ganzes betrachtet und interpretiert. Aus den rekonstruierten *theorems*- und *concepts-in-action* werden mit einem interpretativen Zugang anschließend die Regeln des zugrundeliegenden Darstellungssystems rekonstruiert, die die Grundlage für das tatsächliche diagrammatische Schließen der Schülerinnen bilden.

Beispielanalyse

5 − (-5) = 10	5 − (-4) = 9	5 − (-3) = 8
4 − (-5) = 9	4 − (-4) = 8	4 − (-3) = 7
3 − (-5) = 8	3 − (-4) = 7	3 − (-3) = 6

5 + 3 = 8	5 + 4 = 9	5 + 5 = 10
4 + 3 = 7	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9
3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8

Abbildung 1: Ausschnitte der Rechentafeln, die die Schülerinnen in der Analyse vergleichen.

Die Schülerinnen Mia und Marlen sollen zwei Rechentafeln, die ausschnittsweise in Abbildung 1 zu sehen sind, vergleichen, um daraus die Regel zur Subtraktion negativer Zahlen abzuleiten.

1 **Mia**: Also, ähm, wenn du jetzt hier, zum Beispiel dieses fünf minus minus drei gleich acht anguckst ...

2 **Marlen**: ... mhm (zustimmend) ...

3 **Mia**: ... und dann halt nach unten guckst und da ist gen... ist fünf plus drei, halt ohne ...

4 **Marlen**: ...ja ...

5 **Mia**: ... nicht minus drei, sondern nur drei und das ist genau das gleiche Ergebnis

6 **Marlen**: Mhm (zustimmend). Nur, dass da (zeigt auf die untere Tabelle) dann addiert wird, da (zeigt auf die obere Tabelle) wird subtrahiert und da ist der Subtrahend dann keine negative Zahl mehr ...

7 **Mia**: Da sind die Gegenzahlen. Da sind die Gegenzahlen.

8 **Marlen**: Von der zweiten Zahl.

9 **Mia**: Ja.

10 **Marlen**: Die erste Zahl ist die gleiche. Und es wird addiert.

Die in dieser Szene rekonstruierte Handlung ist der Vergleich der beiden Tabellen und dabei insbesondere das Zuordnen von Aufgaben zueinander. Das *theorem-in-action*, das dieser Handlung zugrunde liegt, wird besonders in den Zeilen 3-10 deutlich. Es lautet: *Wenn man eine Subtraktionsaufgabe mit negativem Subtrahenden hat, dann gibt es eine Additionsaufgabe, bei der zu dem Minuenden die Gegenzahl des Subtrahenden addiert wird und das Ergebnis gleichbleibt.* Das diesem *theorem-in-action* zugrundeliegende *concept-in-action* bezieht sich auf die einzelnen Aufgaben, die verglichen werden und lautet: *Zu jeder Subtraktionsaufgabe mit negativem Subtrahenden, gibt es eine entsprechende Additionsaufgabe mit gleichem Ergebnis.*

Da das *concept-in-action* sich auf die einzelnen Aufgaben bezieht, kann aus dem *theorem-in-action* folgende Regel für das Darstellungssystem ‚Arithmetik' rekonstruiert werden: *Anstatt eine negative Zahl von einer ganzen Zahl zu subtrahieren, kann man auch die Gegenzahl addieren.*

Fazit

Die Beschäftigung mit negativen Zahlen eignet sich, um Lernprozesse aus einer semiotischen Perspektive und insbesondere mit diagrammatischem Schließen im Sinne von Peirce zu beleuchten. Um den Prozess des diagrammatischen Schließens bei einem Darstellungssystem, dessen Regeln den Schülern nicht bekannt sind bzw. von ihnen erforscht werden müssen, zu untersuchen, wurde mit Vergnauds Schema-Begriff ein geeignetes Instrument präsentiert, mithilfe dessen sich das tatsächliche diagrammatische Schließen der Schüler aufgrund der impliziten kognitiven Strukturen, die ihren Handlungen zugrunde liegen, rekonstruieren lässt. An einem Beispiel wurde dafür gezeigt, wie sich aus Schülerbearbeitungen *theorems-* und *concepts-in-action* rekonstruieren lassen. Aus den *concepts-in-action* ergeben sich die Darstellungssysteme, deren Regeln aus den *theorems-in-action* rekonstruiert werden. Die Fruchtbarkeit dieses Ansatzes zur Rekonstruktion diagrammatischen Schließens zeigt sich darin, dass die konkreten Handlungen der Lernenden – Erforschen von Eigenschaften eines Diagramms – mit den Regeln der Darstellungssysteme verknüpft werden können.

Literaturverzeichnis

Dörfler, W. (2016). Signs and Their Use: Peirce and Wittgenstein. In A. Bikner-Ahsbahs (Hrsg.), Theories in and of Mathematics Education (S. 21–31). Cham: Springer.

Peirce, C. S. (1976). The new elements of mathematics. (C. Eisele, Hrsg.), Mathematical philosophy (Bd. 4). The Hague; Paris: Mouton Publishers.

Vergnaud, G. (1996). The Theory of Conceptual Fields. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Hrsg.), Theories of Mathematical Learning (S. 219–239). Mahwah, NJ: Erlbaum.