

## „Regelmäßige“ räumliche Polygone – eine Sachanalyse

### 1. Einleitung

Für die Definition der „Regelmäßigkeit“ räumlicher Polygone übernehmen wir die Seiten- und Innenwinkelgleichheit als definierende Eigenschaften regelmäßiger Polygone der Ebene. Dann gibt es nur einen Typ regelmäßiger, d. h. seiten- und winkelgleicher räumlicher Vierecke, den man durch passendes Auffalten zweier kongruenter gleichschenkliger Dreiecke um ihre gemeinsame Basis erzeugen kann (u. a. Schumann 2017). Der Viereckinnenwinkel nimmt dabei Werte zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  an. Ein regelmäßiges räumliches Viereck (kurz: 3D-Viereck) besitzt acht Deckabbildungen (drei Geradenspiegelungen, zwei Ebenenspiegelungen, eine Drehspeiegelung, eine Punktspiegelung und die identische Abbildung). Jede der Ecken eines regelmäßigen Vierecks kann mittels einer Deckabbildung auf jede andere seiner Ecken abgebildet werden. In diesem Fall sagt man, das Vieleck, hier Viereck, ist „eckenäquivalent“. – Das regelmäßige räumliche Fünfeck ist immer planar (u. a. Van der Waerden 1970)! – Einfache seiten- und winkelgleiche 3D-Sechsecke sind schnell gefunden; es sind zwei besondere Kantenpolygone des Würfels.

### 2. Konstruktion „regelmäßiger“ 3D-Sechsecke

Im Folgenden benutzen wir das prototypische Dynamische Raumgeometrie-System Cabri 3D (Bainville & Laborde 2004-2015) für räumliche Konstruktionen und physisch vorstellbare Manipulationen (Schumann 2007); man kann aber auch ein anderes Dynamisches Raumgeometrie-System verwenden.

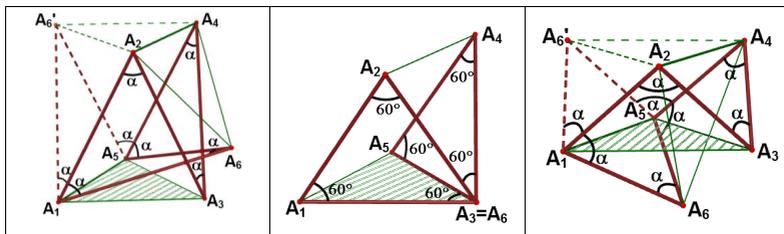


Abb. 1

Abb. 2

Abb. 3

Drei 3D-Sechseck-Typen kann man jeweils aus dem betreffenden antiprismatischen Mantelpolygon  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$  mittels Spiegelung z. B. an der Ebene  $A_1A_2A_4A_5$  erhalten: Je nach Größe des Winkels  $\alpha$  ergeben sich für  $\alpha$  mit  $0^\circ < \alpha < 60^\circ$  (Abb. 1); für  $\alpha = 60^\circ$  (Abb. 2); für  $\alpha$  mit  $60^\circ < \alpha < 120^\circ$

(Abb. 3). Diese 3D-Sechsecke sind symmetrisch zu den mittelsenkrechten Ebenen der Seite  $A_1A_2$  bzw.  $A_4A_5$  und der Seite  $A_1A_5$  bzw.  $A_2A_4$ , die zueinander senkrecht stehen; daher sind die Sechsecke axialsymmetrisch zur Schnittgeraden dieser mittelsenkrechten Ebenen.

Ein weiteres „regelmäßigen“ 3D-Sechseck ist das aus den Flächendiagonalen eines dreiseitigen Prismas bestehende (Abb. 4). Die Symmetrie-Elemente dieses 3D-Sechsecks sind die des zugehörigen geraden dreiseitigen Prismas. Bei diesem 3D-Sechseck ist jede seiner Ecken mit einer Deckabbildung auf jede andere seiner Ecken abbildbar. Aus diesem Seitendiagonalen-Polygon kann man durch Spiegelung z. B. des Dreiecks  $A_1A_5A_6$  an der Ebene  $A_1A_2A_4A_5$  nur einen weiteren Abkömmling gewinnen (Abb. 5). Dieser ist punktsymmetrisch und hat nur eine Symmetrie-Ebene. – Es gibt noch einen weiteren Typ von seiten- und winkelgleichen 3D-Sechsecken (Abb. 6); sein Winkel  $\alpha$  kann zwischen  $0^\circ$  und  $120^\circ$  variieren. – Man kann zeigen (Frank & Schumann 2019), dass alle Typen seiten- und winkelgleicher 3D-Sechsecke symmetrisch sind.

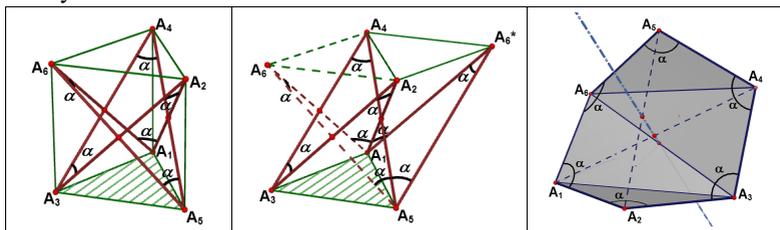


Abb. 4

Abb. 5

Abb. 6

### 3. Konstruktion „regelmäßiger“ Sieben- und Achtecke

„Regelmäßiges“ 3D-Siebenecke zeigen die Abbildung 7-9, welche nur eine Ebenenspiegelung als Deckabbildung hat; der auf der Symmetrie-Ebene liegende Eckpunkt kann nicht auf die restlichen Eckpunkte abgebildet werden. Diese 3D-Siebenecke gehören zu einer Schar mit dem Scharwinkel  $\alpha$  zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$ .

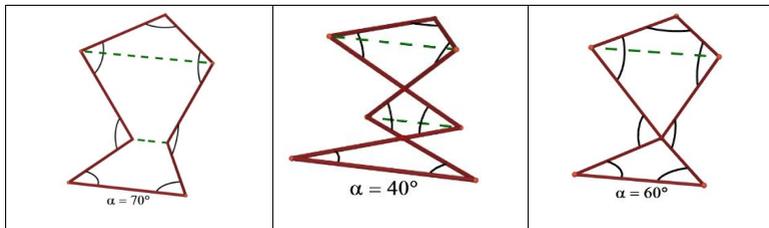


Abb. 7

Abb. 8

Abb. 9

Wir schließen die Konstruktion „regelmäßiger“ 3D-Achteck an. Ein einfaches Achteck dieser Art liefert ein Kantenpolygon des Würfels. Weitere „regelmäßige“ 3D-Achtecke mit dem Achteckwinkel als Parameter ergeben sich in Analogie zu Abschnitt 2: Die Eckpunkte der „regelmäßigen“ 3D-Achtecke  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$  liegen auf seitengleichen Vierecken  $A_1A_3A_5A_7$  und  $A_2A_4A_6A_8$ , die auch räumliche Vierecke sein können. Wir beginnen mit dem Quadrat als Basisviereck und verfahren analog wie bei der Konstruktion der 3D-Sechsecke. Als erstes erhalten wir ein „regelmäßiges“ 3D-Achteck als Petrie-Polygon bzw. Mantelpolygon eines viereckigen Antiprismas quadratischer Grundfläche, wobei der Achteckwinkel zwischen  $0^\circ$  und  $135^\circ$  liegen kann. Mittels entsprechender Ebenenspiegelung einer Ecke bekommt man weitere Typen, die von der Winkelgröße abhängen; die nichtquadratischen Ecken bilden 3D-Rauten, d. h. Rauten, die durch Auffalten ebener Rauten längs einer Diagonalen entstehen. Sie haben die gleiche Seitenlänge wie das Quadrat. Aus diesen Typen ergeben sich mittels geeigneter Ebenenspiegelung jeweils ein weiterer Abkömmling (Abb. 10 - 12, nur mit Markierung der gleichen Winkel). Geht man von einer 3D-Raute aus, so sind die übrigen vier Ecken wieder Ecken eines Quadrats von gleicher Seitenlänge wie die 3D-Raute. Quadrat und 3D-Raute als Basisvierecke verhalten sich also quasi dual zueinander. „Regelmäßige“ 3D-Achtecke mit einer ebenen Raute als Basisviereck kann es nicht geben, denn nur das Petrie-Polygon eines viereckigen Antiprismas mit quadratischer Grundfläche ist ein „regelmäßiges“ 3D-Achteck. Die bisherige Sammlung von Typen regelmäßiger 3D-Achtecke ist natürlich nicht vollständig, so bilden z. B. zwei benachbarte regelmäßige Fünfeck des platonischen Dodekaeders ohne ihre gemeinsame Seite ein „regelmäßiges“ Achteck. – Der Leser kann selbst weitere „regelmäßige“ 3D-Polygone entdecken, z. B. solche als Kantenpolygone Johnsonscher Polyeder (konvexe Polyeder aus regelmäßigen Polygonen).

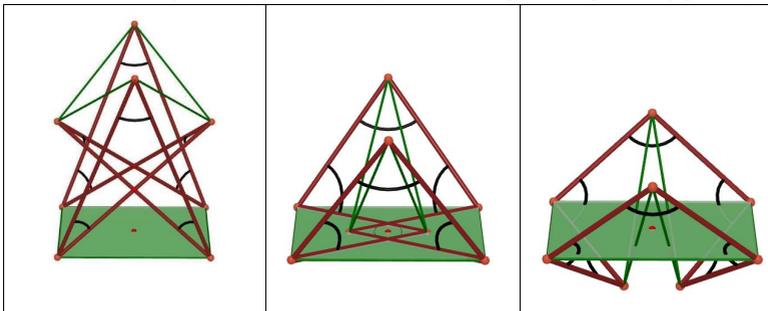


Abb. 10

Abb. 11

Abb. 12

#### 4. Präzisierung des Regelmäßigkeitsbegriffs

Es stellt sich die Frage, ob die Übernahme der Definition regelmäßiger ebener Polygone für räumliche Polygone sinnvoll ist, denn diese Definition subsummiert auch räumliche Polygone, die nicht regelmäßig „aussehen“, weil sie nicht eckenäquivalent wie die regelmäßigen ebenen Polygone sind. Es ist deshalb zweckmäßig, für die Regelmäßigkeit räumlicher Polygone außer ihrer Seitengleichheit noch ihre Eckenäquivalenz zu fordern, welche die Innenwinkelgleichheit, aber nicht die Seitengleichheit eines Polygons einschließt. Nach dieser Definition blieben als regelmäßige räumliche Polygone mit mehr als fünf Ecken nur übrig die  $2n$ -eckigen Mantelpolygone  $n$ -eckiger Antiprismen mit regelmäßigen und einander kongruenten Grund- und Deckflächen für  $n = 3, 4, 5, \dots$  (Abb. 13) und die  $2n$ -eckigen Polygone aus den Seitenflächendiagonalen der  $n$ -seitigen geraden Prismen regelmäßiger Grundflächen für  $n = 2k+1$  mit  $k = 1, 2, 3, \dots$  (Abb. 14). Einen Beweis dafür haben Efremovitch und Iljashenko schon 1962 geführt; ihr Beweis gilt sogar im  $n$ -dimensionalen (reellen) euklidischen Raum ( $n \geq 3$ ).

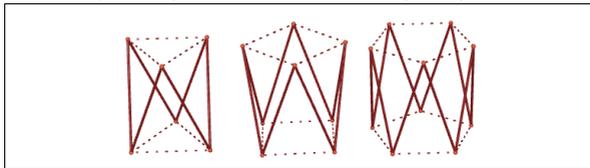


Abb. 13

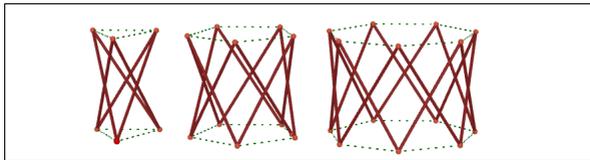


Abb. 14

#### Literatur

- Bainville, E. & Laborde, J.-M. (2004-2015). Cabri 3D 2.1. Grenoble: Cabrilog ([www.cabri.com](http://www.cabri.com)).
- Efremovitch, V. A.; Iljashenko, Ju. S. (1962). Regelmäßige Polygone im  $E^n$  (Russisch). Bulletin der Moskauer Universität, Nr. 5, 18 – 23
- Frank, R. & Schumann, H. (2019). Regelmäßige räumliche Sechsecke. Erscheint in: Informationsblätter der Geometrie (IBDG) Jg. 38
- Schumann, H. (2007). Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Verlag Franzbecker.
- Schumann, H. (2017). Das räumliche Viereck – eine Einführung. In: MNU Journal, Jg. 70, Heft 6, 382 - 389
- Van der Waerden, B. L. (1970). Elemente der Mathematik, Jg. 25, 73 - 78.