

Mathematisches Denken organisieren und reorganisieren

Denken ist das Ordnen des Tuns (Aebli 1981), Denken ist also das Organisieren des eigenen Handelns. Was ist dementsprechend das Ordnen des Denkens, das Organisieren des eigenen Denkens? Es ist das Planen, das Überwachen und das Bewerten des eigenen Denkens, das Denken über Denken. Dafür steht der Begriff Metakognition (Sjuts 2001, 2003, Hasselhorn 2010).

Forschung über Metakognition und Ausübung von Metakognition sind hierzulande bisher wenig verbreitet (Kaiser et al. 2018). Damit mangelt es an vertieften Erkenntnissen und erprobten Erfahrungen über den Einsatz metakognitiver Strategien und Aktivitäten. Und damit bleiben Möglichkeiten, den Erfolg von Lehren und Lernen zu steigern, ungenutzt. Weltweite Studien haben nämlich ergeben, dass metakognitive Strategien mit dem Wert 0,69 eine sehr große Effektstärke besitzen (Hattie 2015, S. 224).

Eine Änderung der hiesigen Verhältnisse beim Lehren und Lernen könnte sich dadurch ergeben, dass der Grundsatz des evidenzbasierten Handelns in Schule und Unterricht mehr, sogar deutlich mehr Geltung erhält. Das erfordert ein Umdenken im beruflichen Handeln. Es gilt, die Wirksamkeit von Lehr- und Lernprozessen zu überprüfen – auf belegbare Weise. Aussichtsreich für ein evidenzbasiert gestaltetes Lehren und Lernen ist planmäßige Metakognition. Sie macht Lehrende wirksamer und Lernende erfolgreicher. Zu beachten ist indes, dass Metakognition „organisch“ und „permanent“ praktiziert wird (Kaiser et al. 2018, S. 24).

Während bei der Fort- und Weiterbildung von Erwachsenen das laute Denken in hohem Maße erfolgversprechend ist (Kaiser et al. 2018), gilt für das schulische Lernen die Verschriftlichung des eigenen Denkens als grundlegende Art und Weise zur Steigerung von Lernwirksamkeit (Sjuts 2018a). Lautes Denken deckt das eigene Denken auf, Verschriftlichung macht das eigene Denken, Lernen und Verstehen bewusst und damit regulier- und kontrollierbar.

Beim Lehren und Lernen von Mathematik haben Aufgaben eine besondere Bedeutung (Leuders 2015). Aufgaben lassen sich einsetzen, um Denken, Lernen und Verstehen zu steuern. Mittels Aufgabenbearbeitungen sollen Wissen und Können auf- und ausgebaut werden. Ziel ist dabei ein hohes Maß an Verfügbarkeit und Erweiterbarkeit von Wissen und Können. Damit Aufgabenbearbeitungen in diesem Sinne eine möglichst ausgeprägte Wirksamkeit entfalten, sind ein gezieltes Bewusstmachen und ein systematisches Organisieren des eigenen Denkens, Lernens und Verstehens erforderlich

(Sjuts 2001, 2018a). Gefragt ist also die denk- und lernbegleitende Metakognition. Metakognitive Aktivitäten bestehen darin, die vor, während und nach der Aufgabenbearbeitung liegenden Tätigkeiten, also Planung, Überwachung und Selbstbewertung, genau und gründlich zu betreiben.

Die folgenden Ausführungen widmen sich der Frage, wie Metakognition in Gang kommen kann. Dabei werden drei Möglichkeiten aufgezeigt, a) die Anforderung, bei der Aufgabenbearbeitung systematisch Metakognition einzubeziehen, b) die Erweiterung von Aufgabenstellungen um spezifische Aufforderungen zur Metakognition und c) der Einsatz bestimmter Aufgaben, denen ein Anstoß zur Metakognition auf besondere Weise innewohnt.

a) Bereits in der Grundschule hat ein durch Aufgaben geleitetes Lernen einen festen Platz. Dies gilt insbesondere für sogenannte Text- oder Sachaufgaben. Um eine Sicherheit im äußeren Zugriff zu schaffen, wird zur Bearbeitung solcher Aufgaben zumeist ein bestimmtes Vorgehen etabliert. Es besteht aus dem Dreischritt Frage-Rechnung-Antwort. Auf diese Weise wird eine Verschriftlichung veranlasst, die eine Selbstüberwachung begünstigt. Die so mögliche Metakognition ist dennoch nicht gewährleistet. Eine explizite Aufforderung zu einem vierten Schritt, nämlich zur Überprüfung, wäre gerade bei jungen Schülerinnen und Schülern nötig, um eine Kontrolle planmäßig vorzunehmen. Besser wäre also der Vierschritt Frage-Rechnung-Antwort-Überprüfung. Dieser müsste dann zu einer festen Üblichkeit werden.

b) Eine andere Form, metakognitive Aktivitäten in Gang zu setzen, ist die Erweiterung vorhandener Aufgaben um ausgewiesene Aufgabenstellungen zur denk- und lernbegleitenden Metakognition. Diese verlangen ein Explizieren, Variieren, Formalisieren, Analysieren oder Synthetisieren und zielen darauf ab, dass Lernende bei der Aufgabenbearbeitung in bewusster Weise agieren (Sjuts 2018b). Übliche Mathematikaufgaben lösen nicht von selbst metakognitive Aktivitäten aus. Die explizite Aufforderung ist also ein wichtiger Bestandteil der erweiterten Aufgabe. Sie sorgt dafür, dass Metakognition einen gezielten Impuls erhält.

Beispiel:

Linda muss in diesem Schuljahr sechs Arbeiten in Englisch schreiben. Die ersten beiden gingen mit 3 und 4 aus; der Durchschnitt daraus ist 3,5. Was muss sie im Durchschnitt in den restlichen vier Arbeiten erzielen, wenn sie insgesamt durchschnittlich auf 2,5 kommen will?

Charlotte und Johanna unterhalten sich über ihre Lösungen. Charlotte nennt 2,0, während Johanna 1,5 für richtig hält. Charlotte versucht, auf Johanna einzugehen: „Du denkst, dass 1,5 richtig ist, weil du ..., aber ...“ Vervollständige Charlottes Erklärung.

Lösung:

weil du denkst, mit dem Durchschnitt 1,5 und dem Durchschnitt 3,5 auf den Gesamtdurchschnitt 2,5 zu kommen, aber es sind einmal vier und einmal zwei Arbeiten.

Du musst so rechnen: $2,5 \cdot 6 = 15$, $15 - 7 = 8$, $8 : 4 = 2$
Also muss 2,0 der Durchschnitt der vier Arbeiten sein.

Die hier vorliegende Abwandlung einer Aufgabe aus der Mathe-Welt (2004, S. 12) nutzt ein Gestaltungsformat zur diskursiven Auseinandersetzung. Die erweiterte Aufgabenstellung enthält bestimmte Lücken. Eine denkbare falsche und eine richtige Begründung sind in der Bearbeitung also zu ergänzen. Die Aufgabe veranlasst ein bewusstes Organisieren und Reorganisieren des Denkens.

c) Selbstverständlich ist Metakognition mit Aufwand und daher mit Einsicht verbunden. Eine Einsicht kann durch eine passende Aufgabe entstehen, nämlich dann, wenn der zur Aufgabe gehörenden Sache ein Risiko zum Fehlerhaften oder Falschen innewohnt. Auf diese besondere Gefahr ist man zunächst nicht eingestellt, aber sie offenbart sich in der Sache. Die – zunächst leichtfertige und unzulängliche – Auseinandersetzung mit der Aufgabe gibt den Anstoß für eine genauere und gründlichere Beschäftigung. Daraus erwachsen während der Aufgabenbearbeitung Korrekturen und Verbesserungen. Kurzum: So erfolgt Melioration durch Metakognition.

Beispiel:

Jakob schaut auf Anna, aber Anna schaut auf Gregor. Jakob ist verheiratet, Gregor nicht. Schaut eine verheiratete Person auf eine unverheiratete Person?

Die im Text enthaltenen Informationen sind einfach und klar. Auch die Frage ist leicht verständlich. Ist sie zu bejahen? Ist sie zu verneinen? In voreiliger Weise mag man das eine wie das andere vielleicht denken und dann doch unsicher werden. Man ist verwirrt. Die Antwort ist nicht ohne weiteres ersichtlich. Der verheiratete Jakob schaut auf Anna. Ist sie unverheiratet? Man weiß es nicht. Anna schaut auf den unverheirateten Gregor. Ist sie verheiratet? Man weiß es nicht. Mit der Erkenntnis über eine fehlende Kenntnis bahnt sich indes eine Lösung an. Sie lässt sich durch eine Illustration verdeutlichen:

Jakob (verheiratet) schaut auf Anna schaut auf Gregor (unverheiratet)

Im Fall, dass Anna unverheiratet ist, schaut eine verheiratete Person auf eine unverheiratete Person (Jakob auf Anna). Im Fall, dass Anna verheiratet ist, schaut eine verheiratete Person auf eine unverheiratete Person (Anna auf Gregor). In jedem Fall schaut also eine verheiratete Person auf eine unverheiratete Person. Die einfache und klare Antwort auf die in der Aufgabe gestellte Frage lautet: ja. Man muss gar nicht wissen, ob Anna verheiratet oder unverheiratet ist. Es kann völlig offenbleiben, welcher Fall in der Situation vorliegt.

Allerdings gelangt man zur Lösung erst dadurch, dass man sich einer fehlenden, aber entbehrlichen Kenntnis bewusst wird. Ein für notwendig erachtetes Wissen ist für die Lösung der Aufgabe gar nicht erforderlich. Eine Betrachtung der beiden möglichen Fälle reicht aus. Die Bewältigung der Anforderung erfolgt durch den metakognitiven Sichtwechsel, durch ein Reorganisieren des Denkens.

Selbstverständlich kann Metakognition auch aus eigenem Antrieb erfolgen, durch eine Selbstbefragung (Kaiser et al. 2018), durch eine Selbstüberwachung, durch eine Selbstbeurteilung. Man kann sich selbst eine Schwierigkeit, ein Problem schaffen, indem man fragt: „Warum tue ich das eigentlich? Ginge es nicht anders? Aber wie?“ (Aebli 1981)

Literatur

- Aebli, Hans (1981). *Denken: das Ordnen des Tuns*. Band II. Denkprozesse. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Hasselhorn, Marcus (2010). Metakognition. In: Detlef H. Rost (Hrsg.). *Handwörterbuch Pädagogische Psychologie* (4., überarbeitete und erweiterte Auflage) (541-547). Weinheim: Beltz.
- Hattie, John (2015). *Lernen sichtbar machen*. Baltmannsweiler: Schneider.
- Kaiser, Armin; Kaiser, Ruth; Lambert, Astrid & Hohenstein, Kerstin (2018). *Metakognition: Die Neue Didaktik*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Leuders, Timo (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In: Regina Bruder et al. (Hrsg.). *Handbuch der Mathematikdidaktik* (435-460). Berlin, Heidelberg: Springer.
- Mathe-Welt (2004). In: *mathematik lehren* 127.
- Sjuts, Johann (2001). Metakognition beim Mathematiklernen: das Denken über das Denken als Hilfe zur Selbsthilfe. In: *Der Mathematikunterricht*, 47 (1), 61-68.
- Sjuts, Johann (2003). Metakognition per didaktisch-sozialem Vertrag. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24 (1), 18-40.
- Sjuts, Johann (2018a). Metakognitive Strategien in Mathematik. In: *mathematik lehren* 211, 20-24.
- Sjuts, Johann (2018b). Aufgabenstellungen zur Metakognition in der Schulmathematik. In: *Beiträge zur Tagung des Arbeitskreises Mathematiklehren und -lernen in Ungarn 2018*.