Katharina SKUTELLA & Benedikt WEYGANDT, Berlin

Analysis reloaded
Ein Lehrkonzept für Bachelor- und Masterstudierende zur Überbrückung beider Diskontinuitäten

In diesem Beitrag wird ein Lehrkonzept vorgestellt, welches mit dem Ziel entwickelt wurde, dem von Felix Klein beschriebenen Problem der doppelten Diskontinuität entgegenzuwirken. Während Klein (1908) eine zusammenfassende Vorlesung mit rückblickendem Charakter hielt, steht bei dem vorgestellten Ansatz die eigentätige und reflektierende Auseinandersetzung mit den Inhalten im Mittelpunkt. Das Besondere an diesem Lehrkonzept besteht darin, dass fortgeschrittene Masterstudierende vom höheren Standpunkt aus die Inhalte der Analysis wiederholen, reflektieren und Beziehungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik herstellen. Im Rahmen eines fachdidaktischen Vertiefungsseminars entwickeln Masterstudierende in Kleingruppen Workshops zu zentralen Themen der Analysis, welche anschließend als Zusatzangebot für Bachelorstudierende der Vorlesung Analysis I angeboten wurden. Durch das Workshopformat werden zwei Gruppen zusammengebracht, die sich jeweils an einer der Schnittstellen befinden und mit ihrem spezifischen Blick auf die Inhalte der Analysis schauen.

Motivation und Lehrkonzept

Bauer & Büchter fordern mehr Tiefgang im schulischen Analysisunterricht und plädieren für eine stärkere Orientierung an den Prinzipien der Wissenschaftsorientierung und Wissenschaftspropädeutik: Insbesondere „soll der Mathematikunterricht die typischen Denk- und Arbeitsweisen in der Mathematik sichtbar und erfahrbar werden lassen“ (Bauer & Büchter 2017, S. 19). Jedoch erleben Lehramtsstudierende den Übergang von der Hochschule zur Schule als Bruchstelle, sie nehmen Schulmathematik und universitäre Mathematik als zwei voneinander getrennte Welten wahr. Folglich fällt es den zukünftigen Lehrkräften schwer, die universitäre Mathematik im eigenen Mathematikunterricht gewinnbringend zu nutzen, und Wissenschaftsorientierung und -propädeutik bleiben zwangsläufig auf der Strecke. Aus diesem Grund halten wir eine vertiefte Auseinandersetzung mit der Analysis vom höheren Standpunkt aus im Studium für zwingend notwendig und schlagen mit diesem Lehrkonzept eine Möglichkeit der Umsetzung vor.

Im Sommersemester 2018 wurde erstmals an der Freien Universität Berlin ein fachdidaktisches Vertiefungsseminar angeboten, welches fortgeschrittenen Masterstudierenden die Gelegenheit bot, Inhalte der Analysis I anhand von Schnittstellenaufgaben (u. a. Bauer 2013a, 2013b, Prediger 2013, Weygandt & Oldenburg 2018) zu wiederholen und „Schulmathematik und universitäre Mathematik [...] als füreinander nützlich und aufeinander bezogen" (Bauer 2013b, S. 41) zu erleben. Die Masterstudierenden entwickelten im Rahmen des Seminars Workshops für Bachelorstudierende der Analysis I, mit dem Ziel einer nachhaltigen und verstehensorientierten Vertiefung der Vorlesungsinhalte.

Umsetzung der Workshops

Geplant und durchgeführt wurden sechs 90-minütige Workshops zu den Themenbereichen Folgen, Reihen, Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Jeder Workshop wurde von zwei bis vier Masterstudierenden des Lehramts Mathematik unter Supervision der Dozierenden konzipiert, durchgeführt und evaluiert. Die Termine der Workshops wurden so gelegt, dass eine inhaltliche Passung der Vorlesungs- und der Workshop-Themen gewährleistet war.

Die Masterstudierenden konnten bei ihrer Planung auf einen Pool von Schnittstellenaufgaben zur Analysis zurückgreifen. Bei der methodischen Gestaltung kamen u. a. das genetische Prinzip und das entdeckende Lernen zum Tragen, mit dem Ziel, tragfähige Vorstellungen aufzubauen. Die verwendeten Schnittstellenaufgaben sollen nachfolgend durch eine Aufgabe beispielhaft illustriert werden. In der vorgestellten Aufgabe geht es darum, die Voraussetzungen des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung zu beleuchten.

Satz 8.18 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prüfen Sie den Mittelwertsatz, indem Sie jeweils eine der folgenden Voraussetzungen weglassen bzw. abändern. Überprüfen Sie, ob der Satz dann immer noch gültig ist. Erfinden Sie ggf. ein einfaches Beispiel, welches die jeweilige Voraussetzung verletzt und zeigen Sie daran, dass der Satz ohne diese Voraussetzung nicht mehr gilt. (i) Ändern Sie die Voraussetzung »f stetig auf $[a, b]$« in »f stetig in a und b«. (ii) Lassen Sie genau eine der Voraussetzungen »f stetig in a« oder »f stetig in b« weg. (iii) Lassen Sie die Voraussetzung »f differenzierbar auf (a, b)« weg. (iv) Lassen Sie die Voraussetzung »$a < b$« weg.

Entsprechend der Einteilung nach Bauer (2013, S. 41) fällt diese Schnittstellenaufgabe in die Kategorie *Mathematische Arbeitswesen üben und reflektieren*. Ein Großteil der Masterstudierenden hatte zum Zeitpunkt der Durchführung bereits ein Praxissemester an einer Schule absolviert. Dadurch konnten sie bekannte Unterrichtsmethoden auf die Hochschullehre übertragen und um spezifisch hochschuldidaktische Konzepte (z. B. peer instruction) ergänzen. Insbesondere zeichneten sich die Workshops durch eine klare Strukturierung, durch eine hohe Methodenvielfalt (u. a. Placemat, Gruppenpuzzle) und durch den Einsatz digitaler Werkzeuge (z. B. DGS, ARS) aus.

Für die Bachelorstudierenden der Einstiegsvorlesung Analysis I stellten die sechs Workshops ein zusätzliches, freiwilliges Lehrangebot (ohne Leistungspunkte) dar, welches in zeitlich unregelmäßigen Abständen ergänzend zum regulären Vorlesungs- und Übungsbetrieb stattfand. In den Workshops erhielten die Bachelorstudierenden die Möglichkeit, zentrale Begriffe und Konzepte der Analysis anhand hochschuldidaktisch fundierter Schnittstellenaufgaben und entsprechender Methoden genauer unter die Lupe zu nehmen. Am Ende jedes Workshops wurde das Feedback der Bachelorstudierenden eingeholt, welches durchweg positiv ausfiel. Besonders geschätzt wurde die Betonung auf Anschaulichkeit und Verständnis bei den Aufgaben. Ferner hoben die Bachelorstudierenden das Unterstützungsangebot der Masterstudierenden, z. B. durch Hilfestellungen bei der Bearbeitung von Aufgaben, positiv hervor. Auch Methodenvielfalt, Gruppenarbeit und Spaß wurden als positive Merkmale genannt.

Test zum Begriffsverständnis

Bei der Durchführung der Lehrveranstaltung wurden sowohl bei den Bachelor- als auch bei den fortgeschrittenen Masterstudierenden Defizite beim Begriffsverständnis zentraler Begriffe der Analysis beobachtet. Geplant ist daher, in ausgewählten Lehrveranstaltungen der Lehramtsausbildung Mathematik (sowohl Bachelor als auch Master) das Begriffsverständnis von Studierenden zum Thema Stetigkeit zu erheben. Hierzu wurden von den Autor*innen dieses Beitrags zwei Tests entwickelt, welche gezielt konzeptuelles Wissen zu den Themen Stetigkeit resp. Folgen abfragen. Die Testaufgaben umfassen dabei die Bereiche concept image und Fehlvorstellungen (bei Stetigkeit siehe Tall & Vinner, 1981; bei Folgen siehe Przenioslo, 2005 oder Mei & Heitzer, 2017), verschiedene Zugänge zu den Begriffen (bei Stetigkeit bspw. über ε–δ bzw. über Folgen) und das konkrete Arbeiten mit diesen Definitionen, ferner die Rekonstruktion und das lokale Ordnen des zugehörigen Begriffsnetzes (s. Winter 1983, S. 193–194) sowie eine Einschätzung der Nützlichkeit des eigenen Begriffswissens für den späteren Lehrberuf.

Fazit

Eine Reflexion der Fachinhalte vom höheren Standpunkt aus ist in der Lehramtsausbildung meist nicht regulär vorgesehen. Dabei können gerade solche

Gelegenheiten zur Überbrückung von Diskontinuitäten in der eigenen Lernbiographie beitragen und damit auch zu einer erfolgreicheren Enkulturation im Fach führen. Vor allem im Sinne eines wissenschaftspropädeutischen Mathematikunterrichts halten wir es für wichtig, dass sich Studierende beziehungsreich und nachhaltig mit der Hochschulmathematik auseinandersetzen. Wir schließen mit dem Zitat eines Masterstudierenden des Lehramts Mathematik, welches die Tragweite für den Mathematikunterricht verdeutlich: „Ich behaupte nicht, nun zu jedem Schulinhalt immer die Bezüge zur Hochschule herstellen zu können, jedoch hat das Seminar mir das Wissen mitgegeben, wie diese Bezüge sinnvoll hergestellt werden können und warum diese Bezüge herstellen zu können sinnvoll im Sinne der Ziele und Methoden guten Mathematikunterrichts ist."

Literatur

Bauer, S.; Büchter, A. (2017): Vom Hauptsatz aus weiterdenken – Analysis wissenschaftspropädeutisch unterrichten. In: *Der Mathematikunterricht* 63 (1), S. 17–27.

Bauer, Th. (2013a): Analysis – Arbeitsbuch. Wiesbaden: Springer Fachmedien.

Bauer, Th. (2013b): Schnittstellen bearbeiten in Schnittstellenaufgaben. In: C. Ableitinger, J. Kramer, S. Prediger (Hg.): Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 39–56.

Klein, F. (1908): Arithmetik, Algebra, Analysis. Vorlesung gehalten im Wintersemester 1907–08. Leipzig: Teubner (Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus).

Mei, R. I.; Heitzer, J. (2017): Der Grenzwertbegriff als Exempel der Diskontinuität zwischen Schul- und Hochschulmathematik. In: *Der Mathematikunterricht* 63 (1), S. 3–16.

Prediger, S. (2013): Unterrichtsmomente als explizite Lernanlässe in fachinhaltlichen Veranstaltungen. In: C. Ableitinger, J. Kramer, S. Prediger (Hg.): Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung. Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 151–167.

Przenioslo, M. (2005): Introducing the Concept of Convergence of a Sequence in Secondary School. In: *Educ Stud Math* 60 (1), S. 71–93.

Tall, D. O.; Vinner, S. (1981): Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. In: *Educ Stud Math* 12, S. 151–169.

Weygandt, B.; Oldenburg, R. (2018): Neue Aufgaben in alten Schläuchen: Wie die Fachwissenschaft zusammen mit der Hochschulmathematikdidaktik zu neuen Aufgabenformaten kommt. In: P. Bender und Th. Wassong (Hg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2018. Münster: WTM Verlag.

Winter, Heinrich (1983): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. In: *JMD* 4 (3), S. 175–204.