Daniel SOMMERHOFF, Stefan UFER, München &
Esther BRUNNER, Thurgau

Aspekte der Kodierung mathematischer Beweise

Argumentieren und Beweisen stellen zentrale Lernziele der mathematischen Ausbildung dar: In der Schule gilt Argumentieren als eine der sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen (KMK, 2012) und spätestens in einem mathematischen Studium werden Beweise als fundamentale Methode der Mathematik als Wissenschaft in den Fokus gerückt (z.B. Rach, Heinze, & Ufer, 2014). Dies spiegelt sich in einem entsprechenden Forschungsschwerpunkt der Didaktik der Mathematik wider, welcher sowohl Argumentations- und Beweisprozesse von SchülerInnen sowie Studierenden, als auch deren Produkte untersucht (vgl. G. J. Stylianides, Stylianides, & Weber, 2017). Für die Analyse der Produkte ist der Kodierungsprozess zentral, bei der deren Qualität beschrieben und einschätzt wird. Dazu werden in der Forschung verschiedene Kriterien verwendet, die unterschiedliche Aspekte von Argumentationen bzw. Beweisen in den Vordergrund rücken.

Ausgehend vom Begriff des Beweises sowie verschiedenen Perspektiven auf den Beweisprozess werden im Folgenden zentrale Kriterien für die Kodierung von Beweisprodukten abgeleitet und genauer dargestellt.

Definition und Hintergrund von mathematischen Beweisen

Der Begriff „Beweis“ wird in der mathematikdidaktischen Forschung teils unterschiedlich verwendet und die Abgrenzung von Argumentationen und Begründungen ist schwierig (Brunner, 2014; Reid & Knipping, 2010). Oftmals werden mathematische Beweise jedoch als Argumentationsketten verstanden, welche spezifischen sozio-mathematischen Normen entsprechen (vgl. A. J. Stylianides, 2007; Yackel & Cobb, 1996). Bedingt durch den sozialen Charakter dieser Normen gibt es jedoch keine feste, allgemein akzeptierte Liste an Akzeptanzkriterien für Beweise (Jahnke & Ufer, 2015), sondern diese variieren zwischen verschiedenen mathematischen Communities (vgl. auch Sommerhoff & Ufer, eingereicht). Dies führt zu einer prinzipiellen Unschärfe bei der Bewertung von mathematischen Beweisen. Hinzu kommt, dass Beweisprodukte aus vergleichsweise komplexen Prozessen entstehen und je nach Forschungsinteresse unterschiedliche Aspekte bei der Kodierung der Beweisprodukte im Vordergrund stehen.

Basierend auf der Analyse von zu Grunde liegenden Denkprozessen beim Beweisen können folgende **Beweistypen** unterschieden werden (Wittmann & Müller, 1988): *experimentelle*, *operative*/*inhaltlich-anschauliche* sowie *formal-deduktive* Beweise. Experimentelle Beweise zeichnen sich durch eine induktive Denkweise aus, bei der mit Hilfe von Beispielen auf die zu zeigende Aussage geschlossen wird. Durch diese Form des Beweises soll entsprechend eine lokale, empirische Gewissheit bezogen auf die unmittelbaren Beispiele entstehen. Inhaltlich-anschauliche Beweise gehen darüber hinaus, da sich von einem spezifischen Beispiel gelöst wird und eine generische Begründung / Beispiel erbracht wird, aus welcher die allgemeine Gültigkeit (zumindest für den Beweisenden) anschaulich klar wird. Formal-deduktive Beweise basieren schließlich vollständig auf deduktiven Schlussfolgerungen, mit deren Hilfe Schritt für Schritt die zu zeigende Aussage hergeleitet wird. Oft ist dies verbunden mit der Verwendung einer formal-symbolischen Notation, welche jedoch, basierend auf den Denkprozessen, im Prinzip für diesen Beweistyp nicht notwendig ist.

Basierend beispielsweise auf den Arbeiten von Krummheuer (2001) können verschiedene **Darstellungsformen** bzw. Repräsentationsebenen unterschieden werden: *Rechnerische* Beweise, welche mit Hilfe von konkreten Zahlen und Rechnungen arbeiten, *narrative* Beweise, welche überwiegend verbal sprachlich ausformuliert sind, *ikonische* Beweise, welche mit Hilfe bildhafter, zeichnerischer Ansätze arbeiten, und *formal-symbolische* Beweise, welche sich einer formal-symbolischen Darstellung der Inhalte bedienen.

Gerade im universitären Bereich, in dem Beweise zumeist formal abgefasst sind, wird häufig die **formale Qualität** des Beweises als Kriterium verwendet (vgl. Ottinger, Kollar, & Ufer, 2016; Selden & Selden, 2009). Hier lassen sich zum einen die Verwendung von algebraischer Notation, bspw. in Form von Quantoren und Junktoren, aber auch die genaue Definition von Variablen („$m \in \mathbb{Z}$") und deren Eigenschaften innerhalb eines Beweises bewerten.

Als Gegenpol dieses eher „formal-rhetorischen" Kriteriums wird oft ein „problem-orientierter" Aspekt von Beweisen gesehen (Selden & Selden, 2009). Dieser beruht darauf, dass mathematisches Argumentieren, und damit auch Beweisen, als Problemlöseprozess angesehen werden kann (bspw. Newell & Simon, 1972; Schoenfeld, 1985). Dabei muss eine Ausgangssituation (Voraussetzungen) in eine Zielsituation (zu zeigende mathematische Aussage) übergeführt werden, indem verschiedene Operatoren (Argumente) verwendet werden. Für die Qualität eines Beweises ist aus dieser Perspektive zentral, dass die wesentlichen Operatoren, d.h. die wesentlichen inhaltlichen **Beweisideen** und Argumente gefunden werden.

Schließlich kann als weiteres Kriterium noch die **Argumentationstiefe** angeführt werden. Beispielsweise basierend auf dem vom Toulmin (1958) erstellten Schema, kann für die einzelnen Schlussfolgerungen in einer Argumentation überprüft werden, ob eine ausreichende bzw. akzeptable Begründung („Warrant") angeführt wird, welche bspw. im Falle einer deduktiven

Argumentation nur auf bereits bekannten bzw. bewiesenen Aussagen, den gegebenen Voraussetzungen sowie Axiomen beruhen darf.

Kriterium	Beschreibung
Beweistyp	Fokussiert den unterliegenden Denkprozess des Beweises und den Grad der Allgemeingültigkeit, der mit dem Beweis erreicht werden kann.
Darstellungsform	Unterscheidet auf der Sichtebene zwischen der hauptsächlich für den Beweis verwendeten Darstellungsform.
Formale Qualität	Betrachtet die Verwendung formal-symbolischer Darstellungen sowie deren Adäquatheit und Vollständigkeit.
Beweisideen	Fokussiert auf die im Beweis vorhandenen Ideen, welche für die Herleitung der zu zeigenden Aussage zentral sind.
Argumentationstiefe	Gibt an, wie detailliert bzw. vollständig die im Beweis gegebenen Begründungen sind.

Tabelle 1: Kriterien zur Bewertung von Beweisen

Insgesamt ergeben sich so bereits fünf verschiedene Kriterien für die Beschreibung von Beweisen und die Einschätzung von deren Qualität (vgl. Tabelle 1), welche je nach sozio-mathematischen Normen und Forschungsperspektive unterschiedlich schwer zu gewichten sind und teils noch deutlich feingliedriger operationalisiert werden können bzw. müssen. Auch zeigt sich, dass die Kriterien, obwohl substantiell verschieden, nicht disjunkt sind und beispielsweise das Kriterium „formale Qualität“ bei einem experimentellen Beweis oftmals nicht anwendbar sein wird.

Diskussion

Für die empirische Bewertung von Beweisprodukten müssen diese mit Hilfe von Kriterien analysiert und eingeschätzt werden können. Bereits bei einer theoretischen Analyse möglicher Kriterien zeigt sich jedoch, dass „Beweisqualität“ ein komplexes Konstrukt darstellt, welches sich einerseits nicht mit Hilfe einer einzigen Dimension bzw. einer Zahl abbilden lässt, andererseits durch unterschiedliche Normen in Bezug auf Beweise immer einer gewissen Unschärfe unterliegt. Da die (eindimensionale) Quantifizierung von Beweisqualität jedoch für viele Forschungsfragen nötig oder zumindest günstig ist, muss sowohl bei der Auswahl der Qualitätskriterien als auch bei deren Darstellung und Kommunikation auf Transparenz geachtet werden. Ist dies nicht der Fall, sind widersprüchliche Ergebnisse und Interpretationen auf Basis von unterschiedlichen Kriterien nicht auszuschließen und der gleiche Beweis könnte je nach Kriterium gleichzeitig von hoher und niedriger Qualität sein.

Literatur

Brunner, E. (2014). Mathematisches Argumentieren, Begründen und Beweisen.

Jahnke, H. N., & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Eds.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (pp. 331-355). Berlin, Germany: Springer.

KMK. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss vom 18.10.2012*. Bonn, Germany: (Beschlüsse der Kultusministerkonferenz).

Krummheuer, G. (2001). *Narrative Elements of Children\'s Agrumentations in Primary Mathematics Classrooms*: Franzbecker, Hildesheim.

Newell, A., & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving* (Vol. 104). Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall

Ottinger, S., Kollar, I., & Ufer, S. (2016). Content and Form - All the Same or Different Qualities of Mathematical Arguments? In C. Csíkos, A. Rausch, & J. Szitányi (Eds.), *Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 19-26): Szeged, Hungary: PME.

Rach, S., Heinze, A., & Ufer, S. (2014). Welche mathematischen Anforderungen erwarten Studierende im ersten Semester des Mathematikstudiums? *Journal für Mathematik-Didaktik, 35*(2), 205-228. doi:10.1007/s13138-014-0064-7

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching*. Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, NY: Academic press.

Selden, J., & Selden, A. (2009). Understanding the proof construction process. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. d. Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 196-201). Taipei, Taiwan.

Sommerhoff, D., & Ufer, S. (eingereicht). Acceptance Criteria for Validating Mathematical Proofs Used by Pupils, University Students, and Mathematicians in the Context of Teaching. *ZDM*.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Toulmin, S. E. (1958). *The uses of argument*: Cambridge: Cambridge University Press.

Wittmann, E. C., & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis. In P. Bender (Ed.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis: Festschrift für Heinrich Winter* (pp. 237-258). Berlin, Germany: Cornelsen.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.