

Insa Maria APEL, Darmstadt

Tätigkeitstheoretische Betrachtung von Kennnisqualitäten für mathematische Beweisprozesse

Schwierigkeiten der Studierenden im ersten Semester im Fach Mathematik werden vielfach berichtet, die Abbruchquoten sind entsprechend hoch und es werden Anstrengungen unterschiedlicher Art unternommen, der Übergangsproblematik zu begegnen (vgl. u.a. Greefrath et al., 2018). In theoretischen Betrachtungen werden insbesondere Unterschiede bezogen auf die Kultur der Lehrmethoden und im mathematischen Beweisen zwischen der Mathematik in der Schule und der Mathematik in der Universität beschrieben (vgl. u.a. Rach, 2014).

Beweisen, auf das im Folgenden fokussiert wird, kann verstanden werden als „die deduktive Herleitung eines mathematischen Satzes aus Axiomen und zuvor bereits bewiesenen Sätzen nach spezifizierten Schlussregeln“ (Jahnke & Ufer, 2015, S. 331). Im Rahmen meiner Arbeit werden Beweisaufgaben in den Blick genommen, die typischerweise an einen Studienanfänger im Fach Mathematik im Bereich Analysis I gestellt werden (bspw. der Nachweis der Stetigkeit einer Funktion oder die Äquivalenz verschiedener Stetigkeitsdefinitionen). Die hier fokussierte Art von Beweisaufgaben stellt eine Aufforderung zum Beweisen eines vorgegebenen Satzes dar, dessen Wahrheitsgehalt gesichert ist, alle dazu benötigten Sätze und Begriffe sind in der Regel im Skript zu finden. Mit dem Stellen einer Beweisaufgabe können verschiedene Funktionen (de Villiers, 1990) und Zielstellungen wie die Verifikation der Aussage, ihre Erklärung, Systematisierung und Kommunikation verbunden sein. Insbesondere für die Realisierung der Erklärungs- und Systematisierungsfunktion erscheint ein hohes mathematisches Fachwissen prädictiv für einen in dieser Hinsicht erfolgreichen Beweisprozess. Der Einfluss des mathematischen Fachwissens auf die Beweiskompetenz neben dem mathematisch-strategischen Wissen konnte auch allgemein in einer vergleichenden Studie von Sommerhoff (2017) empirisch aufgezeigt werden.

Im Rahmen meiner Arbeit werden Beweisprozesse in der oben beschriebenen Eingrenzung vor dem Hintergrund der Tätigkeitstheorie beschrieben und mit weiteren Ansätzen vernetzt, wobei insbesondere das mathematische Fachwissen als Einflussfaktor auf die Leistung in einer Beweisanforderung in den Blick genommen wird. Die Tätigkeitstheorie stellt hierfür einen geeigneten theoretischen Rahmen bereit, da sich vor diesem Hintergrund Beweisanforderungen unter Berücksichtigung verschiedener, nicht nur kognitiver Faktoren lerntheoretisch gut beschreiben lassen und Anknüpfungspunkte für die Betrachtung des Einflusses verschiedener Wissensarten und

Wissensqualitäten auf Beweisprozesse sowie Modelle zur Aneignung des mathematischen Fachwissens bereitgestellt werden.

Tätigkeitstheoretischer Rahmen und Kenntnisqualitäten

In der Tätigkeitstheorie (vgl. u.a. Giest & Lompscher, 2006) als moderat konstruktivistische Theorie wird Lernen verstanden als die individuelle Aneignung eines Lerngegenstandes durch ein Subjekt mittels Tätigkeit. Auf die handelnde Auseinandersetzung des Subjektes nehmen verschiedene Aspekte wie individuelle Ziele und Motive Einfluss, aber auch die Bedingungen der Anforderungssituation. Einen entscheidenden Einfluss auf die Handlungsqualität haben die Kenntnisse des Subjektes als individuelles Abbild gesellschaftlichen Wissens, welche sich weiter unterteilen lassen in Begriffs-, Satz- und Verfahrenkenntnisse (im Folgenden mathematische Kenntnisse) sowie metamathematische Kenntnisse (vgl. u.a. Vollrath & Roth, 2012). Im Rahmen von Beweisprozessen sind neben den im Beweis benötigten mathematischen Kenntnissen auch metamathematische Kenntnisse über das Beweisen (wie bspw. Kenntnisse über das Beweisen, Methodenwissen, Beweistypen und –strategien, logische Schlussweisen) relevant. Die Qualität von Kenntnissen beschreibt Pippig (1980) durch acht Parameter, von denen sich zwei auf die Beziehung zu Persönlichkeitseigenschaften, zwei auf die individuelle Verfestigung und vier auf die Adäquatheit der Kenntnis beziehen. Ausgangspunkt für diese Qualitätsparameter ist die Vorstellung einer vernetzten Kenntnisstruktur, wobei Pippig hierarchisch geordnete semantische Netzwerke betrachtet. Auch Drollinger-Vetter (2011) und Vollrath & Roth (2012) gehen von vernetzten Kenntnisstrukturen aus und beschreiben darauf aufbauend Qualitäten von Kenntnissen. Basierend auf diesen Ansätzen und der Arbeit von Feldt-Caesar (2017) kann die Qualität einer Kenntnis durch folgende Parameter beschrieben werden:

Feingliedrige Vernetzungen direkt am Kern des Gegenstandes

- Inwiefern ist der semantische Kern des Gegenstandes adäquat abgebildet? (Exaktheit)
- Inwiefern ist der semantische Kern des Gegenstandes dauerhaft verfügbar und inwiefern ist eine eigene oder von außen gesteuerte Hilfsmittelnutzung zur Reaktivierung nötig? (Verfügbarkeit)
- Inwiefern kann der Gegenstand auf verschiedenen Ebenen der Anschauung dargestellt werden und inwiefern ist ein Wechsel dazwischen möglich? (Anschaulichkeit)

- Inwiefern besteht eine Vernetzung zu Beispielen bzw. Allgemeinem und inwiefern ist ein flexibler Wechsel dazwischen unter Ausweisung des Besonderen möglich? (Allgemeinheit)

Vernetzungen um den Kern des Gegenstandes

- Inwiefern besteht eine Vernetzung zu Alternativdefinitionen bzw. inwiefern ist der Satz mit seinem Beweis vernetzt? (Vernetzung zu Beweis / Alternativdefinition)
- Inwiefern bestehen Vernetzungen zu inner- und außermathematischen Anwendungen? (Vernetzung zu Anwendungen)
- Inwiefern sind die Gesamtstruktur und der Gesichtspunkt der Ordnung des Bereiches abgebildet? (Vernetzung innerhalb des Kenntnisbereiches)

Darüberhinausgehende Vernetzungen

- Inwiefern bestehen Vernetzungen zu innermathematischen Kenntnissen anderer Bereiche? (Vernetzung zu anderen Kenntnisbereichen)

Bei dieser Beschreibung der Qualität einer Kenntnis stellt eine einzelne Kenntnis (also eines der Stoffelemente Satz, Begriff, Verfahren) den Ausgangspunkt der Überlegungen dar. Anschaulichkeit und Allgemeinheit, insbesondere aber auch Exaktheit und Verfügbarkeit beziehen sich dabei auf dieses Stoffelement. Die Vernetzungen des Stoffelementes zu anderen Stoffelementen wären zumeist selbst als Stoffelemente darstellbar. Rücken diese ins Zentrum der Betrachtung, dann kann auch deren Qualität durch die oben genannten Parameter beschrieben werden.

Spezifizierung von Kenntnisqualitäten für Beweisprozesse

Betrachtet man nun die Kenntnisqualitäten, die notwendig scheinen für die Ermöglichung eines erfolgreichen Beweisprozesses, so kann differenziert werden zwischen der Kenntnis des zu beweisenden Satzes und der Qualität der zum Beweis notwendigen mathematischen und metamathematischen Kenntnisse. Die Qualität der Kenntnis des zu beweisenden Satzes sollte bezüglich Exaktheit, Anschaulichkeit und Allgemeinheit hoch sein. Bezüglich der Vernetzung innerhalb des Kenntnisbereiches muss keine vollständige Einbettung vorliegen, es sollten aber Anknüpfungspunkte bestehen. Die Frage nach der Verfügbarkeit ist bei gegebenem Satz nicht mehr relevant. Zum Beweis benötigte mathematische Kenntnisse sollten mindestens eigenständig reaktivierbar und nach der Reaktivierung exakt sein. Auch verschiedene Ebenen der Anschauung und Allgemeinheit sollten nutzbar sein und zwischen ihnen sollte gewechselt werden können. Wichtig scheint darüber hinaus, dass die Kenntnisse innerhalb des Kenntnisbereiches untereinander vernetzt sind, da dies die Interaktion der Argumente ausmacht. Auch

Kenntnisse über logische Schlussweisen und Beweistypen sollten mindestens eigenständig reaktivierbar und nach der Reaktivierung exakt sein. Zudem kann eine Vernetzung zur Anschauung hilfreich sein (bspw. Venn-Diagramme). Die Vernetzungen zu Beispielen können besonders im Rahmen einer Musterorientierung hilfreich sein. Bezüglich der Vernetzungen innerhalb des Kenntnisbereiches wäre zumindest eine grobe Vernetzung zu Beweisverfahren sinnvoll. Insbesondere die nicht explizit kommunizierten Teile metamathematischen Wissens zum Beweisen sollten eine hohe Verfügbarkeit aufweisen und die Exaktheit sollte so ausgeprägt sein, dass sie von der jeweiligen mathematischen Community akzeptiert wird.

Mithilfe der Beschreibung von Kenntnisqualitäten für Beweisprozesse lassen sich prototypisch sowohl Diagnoseinstrumente als auch Aneignungsmaterialien zur Nachbereitung für die in der Vorlesung vorgetragene Begriffe und Sätze erarbeiten, welche die Kenntnisqualitäten der benötigten Stoffelemente und des zu beweisenden Satzes fördern und somit Beweisprozesse unterstützen sollen.

Literatur

- De Villies, M. (1990): *The role and the function of proof in mathematics*. In: Pythagoras. 24 (S. 17-24).
- Drolling-Vetter, B. (2011): *Verstehenselemente und strukturelle Klarheit: fachdidaktische Qualität der Anleitung von mathematischen Verstehensprozessen im Unterricht*. Münster: Waxmann.
- Feldt-Caesar, N. (2017). *Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen: eine theoretische Betrachtung und exemplarische Konkretisierung am Ende der Sekundarstufe II*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- Giest, H., Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit – Lernen aus kulturhistorischer Perspektive*. Berlin: Lehmanns Media.
- Greefrath, G., Hoffmann, M., Koepf, W. (2018). *Mathematik in Schule und Hochschule*. Der Mathematikunterricht. 64, 5.
- Jahnke, H. N., Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In: R. Bruder et al. (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331- 355). Heidelberg: Springer Spektrum.
- Pippig, G. (1980). *Beziehungen zwischen Kenntniserwerb und Entwicklung geistiger Fähigkeiten*. Beiträge zur Psychologie. Berlin: Volk und Wissen.
- Rach, S. (2014). *Charakteristika von Lehr-Lern-Prozessen im Mathematikstudium: Bedingungsfaktoren für den Studienerfolg im ersten Semester*. Münster: Waxmann.
- Sommerhoff, D. (2017). *The individual cognitive resources underlying students' mathematical argumentation and proof skills: from theory to intervention*. LMU München. URL: <https://edoc.ub.uni-muenchen.de/22687/> (21.12.2018).
- Vollrath, H.-J., Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.