

Würfelgebäude nach Seitenansichten und Schatten bauen – eine Interviewstudie mit Grundschulkindern

Anders als in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik findet räumliches Denken in der internationalen mathematikdidaktischen Forschung erst seit einigen Jahren verstärktes Interesse (Sinclair et al., 2016). Mittlerweile besteht weitgehend Einigkeit darin, dass es nicht nur von großer lebenspraktischer Bedeutung ist, sondern darüber hinaus in engem Zusammenhang zu schulischen und akademischen Leistungen im mathematischen und naturwissenschaftlich-technischen Bereich steht. International werden deshalb verstärkte Bemühungen um raumgeometrische Erfahrungen im Elementar- und Primarbereich gefordert.

Würfelgebäude nach Seitenansichten und Schatten bauen

In der hier vorgestellten Studie untersuchen wir, wie Zweit- und Viertklässler Einheitswürfel nutzen, um Würfelgebäude nach zwei vorgegebenen Seitenansichten oder zwei vorgegebenen Schatten zu bauen. Die Projektionen werden dabei in aufrecht stehenden Ständern, auf passend angeordneten Karten oder einer „Doppelkarte“ mit zwei Projektionen dargeboten; Abb. 1 zeigt vier Aufgabenbeispiele.

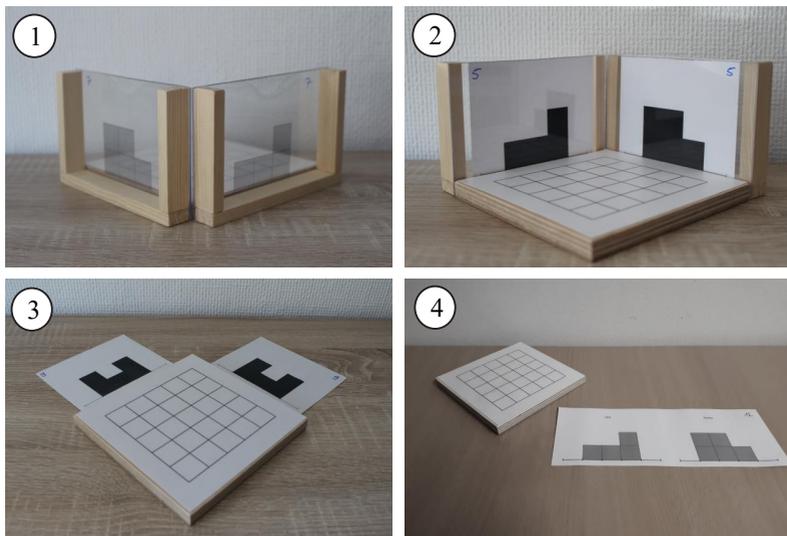


Abb. 1: Aufgabenbeispiele aus der Interviewstudie

Derartige Bauprozesse scheinen uns zum einen besonders geeignet, um wichtige Aspekte des räumlichen Denkens für die Forschung zugreifbar zu machen. Gerade auch zweidimensionale Repräsentationen des Raumes und der Wechsel zwischen 2D und 3D besitzen im Alltag eine enorme Bedeutung. In vorausgegangenen Studien hat sich gezeigt, dass das Nachbauen von Würfelbauwerken ausgehend von mehreren orthogonalen Projektionen die schwierigste Art des Bauens nach zweidimensionalen Vorlagen ist, verglichen beispielsweise mit dem Bauen nach isometrischer Vorlage oder den bekannten „Bauplänen“ entsprechenden numerisch kodierten Seitenansichten. Der hohe Schwierigkeitsgrad resultiert insbesondere aus der Anforderung, zwei Perspektiven zu koordinieren (Benedicto et al., 2015; Gutiérrez, 1996). Für eine erfolgreiche Bearbeitung ist deshalb eine hinreichende *Beweglichkeit des Denkens* notwendig (Hasdorf, 1976).

Zum anderen könnten hier betrachtete Bauprozesse auch genutzt werden, um Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Wechseln zwischen 2D und 3D zu fördern. Aus didaktischer Sicht sind dabei u. a. die unterschiedlichen Arten von Vorgaben interessant, weil sie den Schwierigkeitsgrad erheblich variieren könnten.

Forschungsfragen und methodisches Vorgehen

Mit der Studie gehen wir den folgenden Forschungsfragen nach:

- 1) Wie gehen Grundschul Kinder beim Bauen von Würfelgebäuden nach vorgegebenen Seitenansichten bzw. Schattenprojektionen vor?
- 2) Welche Unterschiede im Hinblick auf Prozesse und Produkte gibt es zwischen dem Bauen nach Seitenansichten und dem Bauen nach Schatten?
- 3) Welche Unterschiede im Hinblick auf Prozesse und Produkte gibt es zwischen dem Bauen nach Vorgabe mittels Ständern, angeordneten Karten und Doppelkarten?
- 4) Welche Schwierigkeitsfaktoren bezüglich der Projektionen lassen sich empirisch rekonstruieren?

Die Datenerhebung erfolgt durch klinische Interviews, die für spätere Analysen videografiert werden. Jedes teilnehmende Kind absolviert zwei etwa 25- bis 40-minütige Interviews, in denen zu jeweils zwei vorgegebenen Projektionen zunächst vorgefertigte Objekte passend angeordnet und in der Hauptphase Würfelgebäude aus einzelnen Einheitswürfeln passend errichtet werden sollen. Dafür wird ein quadratisches 5×5-Gitter bereitgestellt, durch dessen Positionierung es möglich ist, mit zwei gleichwertigen Projektionen (links vorne und rechts vorne bzw. links hinten und rechts hinten) zu

arbeiten. Diese werden zunächst in aufrecht stehenden Ständern, auf passend angelegten Karten und schließlich auf Doppelkarten präsentiert. Dabei werden im ersten Interview entweder ausschließlich Schattenprojektionen oder ausschließlich Seitenansichten vorgegeben. Die jeweils anderen Vorgaben werden im zweiten Interview genutzt, zusätzlich baut das Kind in der letzten Interviewphase im Wechsel nach Schatten und Ansichten. Die Aufgaben zu Schatten und Seitenansichten entsprechen sich (durch Vertauschung der zugehörigen rechten und linken Projektion; vgl. die Aufgaben 1 und 2 aus Abb. 1) jeweils in der Weise, dass sie zu denselben Würfelgebäuden gehören könnten.

An der Interviewstudie nahmen bislang Schülerinnen und Schüler der zweiten und vierten Jahrgangsstufe aus zwei Grundschulen mit sehr unterschiedlichen Einzugsgebieten teil. Vor den Interviews bearbeiteten die teilnehmenden Kinder eine Zusammenstellung von Aufgaben zum Raumvorstellungsvermögen, zu denen aus anderen Untersuchungen bereits Erfahrungen vorliegen. Jeweils zwei Kinder aus derselben Schulklasse und mit vergleichbaren Ergebnissen bildeten ein Probandenpaar. Eins der beiden Kinder bearbeitete im ersten Interview Aufgaben zu Schatten, das andere entsprechende Aufgaben zu Seitenansichten.

Ausgewählte Ergebnisse

Auf eine ausführliche Darstellung bislang vorliegender Ergebnisse aus 40 Interviews müssen wir aus Platzgründen verzichten. Lediglich zwei Aspekte sollen exemplarisch angedeutet werden.

Zu Forschungsfrage 4: Die Lage des höchsten (Würfel-)Turms (hT) stellt sich (erwartungsgemäß) als schwierigkeitsbeeinflussender Faktor dar. So wurden alle Aufgaben mit innen (nahe der Schnittgeraden der Projektionsflächen) positioniertem höchsten Turm von den teilnehmenden Kindern sehr erfolgreich bewältigt. Dies zeigte sich bspw. bei den Aufgaben 2 und 4 aus Abb. 1, die von allen bzw. 19 von 20 Kindern korrekt gelöst wurden. Demgegenüber wurde Aufgabe 1 durch 9 von 17 Kindern fehlerhaft bearbeitet und auch die zu Aufgabe 4 entsprechende Schatten-Aufgabe führte in 8 von 20 Fällen nicht zum Lösungserfolg. Durch den innen liegenden höchsten Turm in Aufg. 2 und 4 können die Projektionen nacheinander quasi im „Halbkreis“ nachgebaut werden und lediglich an den Verbindungsstellen müssen gemeinsame Elemente identifiziert werden. Dies ist in Aufgabe 1 und auch in der zu Aufgabe 4 analogen Schattenaufgabe nicht möglich, da der höchste Turm bezogen auf die Projektionsflächen außen bzw. mittig positioniert ist.

Zu Forschungsfrage 2: In der bislang betrachteten Stichprobe zeigten sich keine Unterschiede zwischen dem Bauen nach Seitenansichten und dem Bauen nach Schatten hinsichtlich der Lösungsraten. Die Lage der Projektionsfläche (vor vs. hinter dem Würfelgebäude) scheint sich somit nicht auf den Lösungserfolg auszuwirken. Die entstehenden Bauwerke unterscheiden sich teilweise jedoch deutlich voneinander. Je nach Vorgaben (insbes. Lage des hT) ist bei vielen Kindern das Bestreben zu erkennen, das Gebäude möglichst nah an mindestens einer Projektionsfläche zu positionieren. So stehen Teile der nach Ansichten errichteten Gebäude weiter vorn auf dem Grundraster als bei den entsprechenden Schattenvorgaben. Besonders deutlich wird dies bei Aufgaben mit innen liegendem höchstem Turm. Hier positionierten die meisten Kinder die Gebäude in maximaler Nähe zu beiden Projektionsflächen. Exemplarisch sei dies für die Aufgabe 3 und die entsprechende Ansichten-Aufgabe in Bauplandarstellung angegeben (Abb. 2).

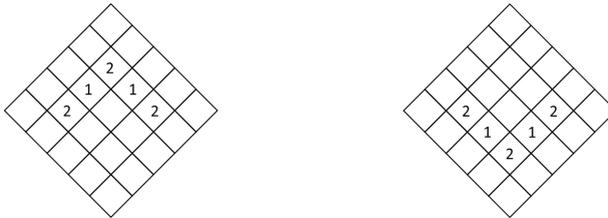


Abb. 2: Würfelgebäude zu Aufgabe 3 nach Vorgabe als Schatten (links) und Ansichten (rechts)

Bei beiden Vorgaben konstruierten 12 von 20 Kindern ein der Abb. 2 (links bzw. rechts) entsprechendes Würfelgebäude.

Literatur

Benedicto, C., Acosta, C., Gutiérrez, A., Hoyos, E., & Jaime, A. (2015). Improvement of Gifted Students' Visualization Abilities in a 3D Computer Environment. In N. Amado & S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 12th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 363–370). Faro, Portugal: University of Algarve.

Hasdorf, W. (1976). Erscheinungsbild und Entwicklung der Beweglichkeit des Denkens bei älteren Vorschulkindern. In J. Lompscher (Ed.), *Verlaufsqualitäten der geistigen Tätigkeit* (pp. 13–75). Berlin: Volk und Wissen.

Gutiérrez, A. (1996). Children's Ability for Using Different Plane Representations of Space Figures. In A. R. Baturó (Ed.), *New Directions in Geometry Education* (pp. 33–42). Brisbane, Australia: Centre for Mathematics and Science Education, QUT.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M. G., Villiers, M. de, & Jones, K. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM-the International Journal on Mathematics Education*, 48(5), 691–719.